

مرحلة الإعداد

الجبر

معروف عبدالرحمن سمحان
عبير بنت حميدي الحربي
جواهر بنت أحمد المفرج



مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity



رياضيات الأولمبياد

مرحلة الإعداد



الجبر

معروف عبدالرحمن سمحان

عبير بنت حميدي الحربي

جواهر بنت أحمد المفرج



مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity



فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر.
سمحان، معروف عبدالرحمن.
رياضيات الأولمبياد - مرحلة الإعداد: الجبر.
معروف عبدالرحمن سمحان؛ عبير حميدي الحربي؛
جواهر أحمد المفرج - الرياض، ١٤٣٦هـ.
٢٧٦ ص؛ ١٦,٥ × ٢٤ سم.
ردمك: ٧-٨٠٢-٥٠٣-٦٠٣-٩٧٨
١- الرياضيات - أسئلة وأجوبة
٢- الرياضيات - تعليم. ٣- الجبر
أ. الحربي، عبير حميدي (مؤلف مشارك)
ب. المفرج، جواهر أحمد (مؤلف مشارك)
ج. العنوان.
ديوي ٥١٠,٧٦ رقم الإيداع ١٤٣٦/٧٣٠٥

الطبعة الأولى
١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

الناشر العبيكان Obeikan للنشر
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية
طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول
هاتف ٤٨٠٨٦٥٤ فاكس ٤٨٠٨٠٩٥
ص.ب ٦٧٦٢٢ الرياض ١١٥١٧

موقعنا على الإنترنت
www.obeikanpublishing.com
متجر العبيكان Obeikan على أبل
http://itunes.apple.com/sa/app/obeikan-store

امتياز التوزيع شركة مكتبة العبيكان Obeikan
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية
طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول
هاتف ٤٨٠٨٦٥٤ فاكس ٤٨٨٩٠٢٣
ص. ب ٦٢٨٠٧ الرمز ١١٥٩٥
www.obeikanretail.com


بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة
Introduction

تعد مسابقات الرياضيات التي يتم تنظيمها دورياً من سمات القرن العشرين، حيث ازداد عدد المتقدمين لهذه المسابقات بشكل ملحوظ وسجلت السنوات الأخيرة أعداداً تجاوزت عشرات الملايين، ولهذه الزيادة في أعداد المتسابقين أسباب عديدة من أهمها، أن هذه المسابقات هي وسيلة للتعرف على الطلاب الموهوبين والمبدعين الذين يواصلون دراستهم بتفوق، ليس في الرياضيات فقط وإنما في المجالات العلمية المختلفة. كما أن للمسابقات تأثيراً إيجابياً على التعليم، إذ أنها أدت إلى إنشاء أندية علمية في المدارس وإلى تطوير مواد إثرائية في العديد من دول العالم، انعكس أثرها على تطوير المناهج التعليمية وأدى إلى بروز باحثين متميزين في الرياضيات أسهموا في حل العديد من المسائل العلمية الصعبة. كما أن لمسابقات الرياضيات تأثيراً إيجابياً على تغيير ثقافة المجتمعات ونظرتهم إلى مادة الرياضيات.

عقدت أول مسابقة أولمبياد دولية في الرياضيات (IMO) في رومانيا عام ١٩٥٩م حيث بلغ عدد الدول المشاركة في هذه المسابقة سبع دول. بعد ذلك توالى عقد المسابقة سنوياً وبانتظام إلى وقتنا الحاضر (ماعدا العام ١٩٨٠م بسبب ظروف طرأت على الدولة المضيفة). ولقد ازداد عدد الدول المشاركة باطراد إلى أن وصل عدد الدول المشاركة في العام ٢٠٠٩م إلى ١٠٤ دولة.

كان أول اشتراك للمملكة العربية السعودية في أولمبياد الرياضيات العالمي في العام ٢٠٠٤م حيث كان أداء الفريق السعودي متواضعاً نتيجة لقلة الخبرة والإعداد

الجيد في التدريب. استمر هذا الأداء المتواضع إلى العام ٢٠٠٨م. بعد ذلك أوكلت وزارة التربية والتعليم مهمة الإعداد للأولمبياد لمؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة"، اتخذت موهبة عدة قرارات نوعية تحسب لها، أهمها الاستفادة من خبرات الدول المتفوقة في مسابقة الأولمبياد في إعداد البرامج التدريبية للفريق السعودي. ومن القرارات الأخرى المهمة، توفير مادة تدريبية باللغة العربية تغطي مراحل التدريب المختلفة فأوعزت إلى فريق من الأكاديميين المهتمين بالمسابقات بوضع سلسلتين من الكتب، السلسلة الأولى تخدم مرحلة الإعداد للراغبين في التدريب المبكر، وأما السلسلة الثانية فهي موجهة للمراحل المتقدمة. تحتوي السلسلة الأولى على ثمانية كتب تعالج أربعة مواضيع هي نظرية الأعداد، الجبر، الهندسة، التركيبات. وكل من هذه الكتب مكون من جزأين ليغطي المرحلة الأولى والثانية من تدريب الناشئين. أما السلسلة الثانية فموجهة إلى المرحلتين الثالثة والرابعة من التدريب ومكونة من عشرة كتب تغطي المواضيع الأربعة السابقة المطلوب من المتدرب معرفتها للتحضير لمسابقة الأولمبياد.

هذا الكتاب هو كتاب في الجبر للمرحلة الأولى ويتكون من خمسة فصول هي الأعداد، المعادلات، المتباينات، كثيرات الحدود، المتتابعات والمتسلسلات. ولقد حرصنا أن تكون المسائل متنوعة وبمستويات صعوبة تتفق مع الاختلاف في القدرات بين الطلاب حيث العديد منها مأخوذ من مسائل مسابقات الناشئين لعدة دول، منها الولايات المتحدة الأمريكية، كندا، المملكة المتحدة، استراليا. إن الهدف الأهم من هذه الكتب هو أن يستطيع الطالب فهم المادة المطروحة حتى مع غياب المدرب ثم يقوم بمحاولة حل المسائل دون النظر إلى حلولها ومن ثم يقوم بمقارنة

حلوله مع الحلول المقدمة في الكتاب لهذه المسائل. كما يتضمن الكتاب مسائل غير محلولة مع وجود الاجابات النهائية لها لزيادة التحدي لدى الطلاب.

الوسيلة الوحيدة للتعلم والتدريب على حل المسائل هي أن يقضي الطالب وقتاً كافياً في التفكير في المسألة ثم يضع لنفسه استراتيجية لحل المسألة، بعد ذلك يجرب هذه الاستراتيجية لمعرفة مدى نجاحها، وقد يضطر إلى تعديلها بصورة تدريجية إلى أن يصل إلى الحل الصحيح. إن تكرار المحاولات في مسائل مختلفة ومتنوعة تكسب الطالب الخبرة اللازمة للوصول إلى المستوى التنافسي في المسابقات.

وفي النهاية نتقدم بالشكر والتقدير إلى مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة" على اهتمامها بوضع برامج مدروسة دراسة جيدة لتدريب الطلاب على المسابقات، سواء المسابقات المحلية أو مسابقات الأولمبياد مما شجعنا على القيام بتأليف هذا الكتاب، الذي نرجو من الله أن يجعله محققاً للهدف الذي أعد من أجله، كما نرجوه أن يوفق طلابنا وطالباتنا في المنافسة على المستويين الوطني والعالمي.

المؤلفون

الرياض

١٤٣٣هـ (٢٠١٢م)

المحتويـات

الاختصارات
Abbreviations

AHSME: American High School Mathematics Examination

AIME: American Invitational Mathematics Examination

AJHSME: American Junior High School Mathematics Examination

AMC 8: American Mathematics Contest 8

AMC 10: American Mathematics Contest 10

AMC 12: American Mathematics Contest 12

Aust.Math.Compt: Australian Mathematics Competiton

British JMC: British Junior Mathematics Challenge

British IMC: British Intermediate Mathematics Challenge

British SMC: British Senior Mathematics Challenge

HMMT: Harvard-MII Math Tournament

MAΘ: Mu Alpha Theta High School Problems

الفصل الأول

الأعداد
Numbers

(١.١) الأعداد الطبيعية [Natural Numbers]

تبدأ دراسة الأعداد بالأعداد الطبيعية (Natural numbers) وهي مجموعة جميع أعداد العد:

$$1,2,3,4,5,6,7,...$$

وهذه المجموعة لا تنتهي. أي لا يوجد عدد طبيعي هو أكبر من جميع الأعداد الطبيعية، وفي مثل هذه الحالات نقول إن المجموعة غير منتهية.

قواسم العدد الطبيعي هي جميع الأعداد الطبيعية التي يقبل العدد القسمة عليها دون باق. على سبيل المثال، قواسم العدد 12 هي

$$1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12$$

في كثير من الأحيان يكون للعدد الطبيعي العديد من القواسم. عند كتابة العدد كحاصل ضرب قواسم نقول إننا حللنا العدد. فمثلاً، كل مما يلي هو تحليل للعدد 12:

$$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3 .$$

أحياناً نكتب 2^2 عوضاً عن 2×2 وتسمى هذه الطريقة في الكتابة طريقة كتابة

عدد كقوة لعدد آخر. فعند كتابة

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

نقول إن العدد 2 (الأساس) مرفوع للقوة 3. وبصورة عامة، إذا كان n عدد طبيعياً فإن a^n يعني ضرب العدد a في نفسه n من المرات.أي أن

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a \times a}_{n \text{ مـــرة}}$$

العدد الطبيعي p الذي له قاسمان بالضبط فقط هما 1 و p يسمى عدداً أولياً (Prime number). والعدد الطبيعي الذي له أكثر من قاسمين يسمى عدداً مؤلفاً (Composite number). بعض الأعداد الأولية هي

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

من المعلوم أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية وأصغرها هو العدد 2 (لاحظ أن العدد 1 ليس أولياً).

(١.٢) بعض اختبارات القسمة [Some Divisibility Tests]

نقول إن العدد a يقسم العدد b (أو العدد b يقبل القسمة على العدد a) إذا استطعنا قسمة b على a دون باق. فمثلاً، العدد 2 يقسم العدد 6 لأن $3 = \frac{6}{2}$. وأما العدد 2 فلايقسم العدد 7 لأن $\frac{7}{2}$ ليس عدداً طبيعياً. أحياناً يكون من المناسب معرفة ما إذا كان عدد يقسم عدداً آخر:

(١) يقبل العدد N القسمة على العدد 2 إذا كانت مرتبة الآحاد للعدد N عدداً زوجياً (لاحظ أن 0 يعتبر عدداً زوجياً).

(٢) يقبل العدد N القسمة على العدد 4 إذا قبل العدد المكون من مرتبتي آحاد وعشرات العدد N القسمة على العدد 4.

(٣) يقبل العدد N القسمة على العدد 3 إذا قبل العدد المكون من مجموع مراتب العدد N القسمة على العدد 3.

(٤) يقبل العدد N القسمة على العدد 5 إذا كانت مرتبة آحاد N هي 0 أو 5.

(٥) يقبل العدد N القسمة على العدد 6 إذا كان N زوجياً ويقبل القسمة على العدد 3.

فمثلاً، العدد 1002 يقبل القسمة على 2 لأنه زوجي ويقبل القسمة على العدد 3 لأن مجموع مراتبه $1+0+0+2=3$ يقبل القسمة على العدد 3 ويقبل القسمة على 6 لأنه زوجي ويقبل القسمة على 3. ولكنه لا يقبل القسمة على العدد 4 لأن 02 لا يقبل القسمة على العدد 4. كما أنه لا يقبل القسمة على العدد 5 لأن مرتبة آحاده لا تساوي 0 ولا 5.

إحدى الحقائق المهمة التي يجب معرفتها عن الأعداد الطبيعية هو امكانية كتابة أي عدد مؤلف كحاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية (وهذه الطريقة وحيدة باستثناء ترتيب العوامل الأولية). فمثلاً

$$144 = 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3 = 2^4\times 3^2.$$

إحدى الطرق لتحليل العدد إلى عوامل أولية (كتابته كحاصل ضرب أعداد أولية) هي تجريب قسمة العدد على أعداد أولية متتالية إلى أن نحصل على عدد أولي. فمثلاً، لتحليل العدد 144 نقوم بعمليات القسمة المتتالية التالية:

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

وبهذا يكون $144 = 2\times2\times2\times2\times3\times3 = 2^4 \times 3^2$.

(١.٣) القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

[Greatest Common Divisor and Least Common Multiple]

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعين أو أكثر يرمز له بالرمز GCD هو أكبر قاسم مشترك بين جميع الأعداد. هناك العديد من الطرق لايجاد GCD نقدم منها طريقتين:

الطريقة الأولى: نقوم بكتابة قواسم كل من الأعداد ثم نبحث عن القواسم المشتركة ونأخذ أكبرها. فمثلاً، لإيجاد $GCD(24,40)$:

قواسم 24: $1,2,3,4,6,8,12,24$

قواسم 40: $1,2,4,5,8,10,20,40$

القواسم المشتركة : $1,2,4,8$

أكبر القواسم المشتركة هو 8 وبهذا فإن $GCD(24,40) = 8$

الطريقة الثانية: نقوم بتحليل كل من الأعداد إلى قوى عوامله الأولية ثم نأخذ الأعداد الأولية المشتركة بأصغر قوة فيكون القاسم المشترك الأكبر هو حاصل ضرب هذه الأعداد. فمثلاً، لإيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 40 نقوم بتحليل كل منهما لنجد

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$40 = 2^3 \times 5$$

العدد الأولي الوحيد المشترك بينهما هو 2 وظهر بقوة 3 في كلا التحليلين. إذن،

$$GCD(24,40) = 2^3 = 8$$

مثال (١) جد GCD للأعداد 120,72,24.

الحل

بتحليل كل من الأعداد الثلاثة نجد أن:

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$72 = 2^3 \times 3^2$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

إذن، $GCD(24,72,120) = 2^3 \times 3 = 24$. ◇

أما المضاعف المشترك الأصغر لعددين أو أكثر يرمز له بالرمز LCM فهو أصغر مضاعف مشترك لهذه الأعداد. سنقدم طريقتين أيضاً لإيجاد LCM:

الطريقة الأولى: نقوم بكتابة مضاعفات كل من الأعداد إلى أن نجد أول مضاعف مشترك فيكون هو المضاعف المشترك الأصغر، فمثلاً لإيجاد $LCM(8,10)$:

مضاعفات العدد 8: $8,16,24,32,40,48,\ldots$

مضاعفات العدد 10 : $10,20,30,40,50,\ldots$

ولذا فإن أول مضاعف مشترك بينهما هو 40 ويكون $LCM(8,10)=40$.

الطريقة الثانية: نقوم بتحليل كل من الأعداد إلى قوى عوامله الأولية ثم نأخذ الأعداد الأولية التي تظهر بالتحليلين أو أحدهما بأعلى قوة فيكون المضاعف المشترك الأصغر هو حاصل ضرب هذه الأعداد. فمثلاً، لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 10 و 8 نقوم بتحليل كل منهما لنجد

$$8=2^3$$
$$10=2\times 5$$

وبهذا يكون $LCM(8,10)=2^3\times 5=40$.

مثال (٢) جد $LCM(12,18,27)$.

الحل

نقوم بتحليل الأعداد فنجد

$$12=2^2\times 3$$
$$18=2\times 3^2$$
$$27=3^3$$

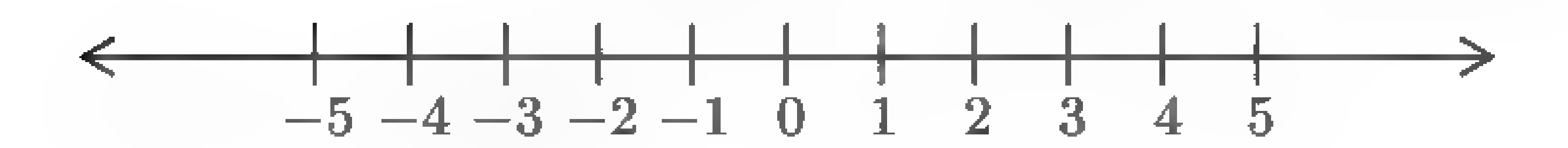
إذن، $LCM(12,18,27)=2^2\times 3^3=108$. ◇

(١.٤) الأعداد الصحيحة (Integers)

تتكون الأعداد الصحيحة من الأعداد الطبيعية السالبة والصفر والأعداد الطبيعية وهي

$$\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\ldots$$

ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو التالي:



وتتم عملية جمع عددين صحيحين وفق التالي:

(١) عند جمع عددين صحيحين متفقين في الإشارة نقوم بجمعهما ووضع الإشارة. مثلاً

$$4 + 5 = 9$$
$$-4 + -5 = -9$$

(٢) عند جمع عددين صحيحين مختلفين في الإشارة نطرح الصغير من الكبير ونضع إشارة العدد الكبير. فمثلاً

$$4 + -5 = -1$$
$$-4 + 5 = 1$$

(٣) إشارة حاصل ضرب الأعداد الصحيحة تتبع القواعد التالية:

$$(+) \times (+) = +$$
$$(-) \times (-) = +$$
$$(+) \times (-) = -$$
$$(-) \times (+) = -$$

(٤) قواعد إشارة خارج قسمة عددين مماثلة لقواعد حاصل الضرب.

مثال (٣) جد ناتج كل مما يلي:

(أ) $-16 - -25$ (ب) $-16 + -25$ (ج) -6×-5

(د) 6×-5 (هـ) $(-3)^2 \times (-2)^3$ (و)

$-24 \div 8$

الحل

(أ) $-16 - -25 = -16 + 25 = 9$.

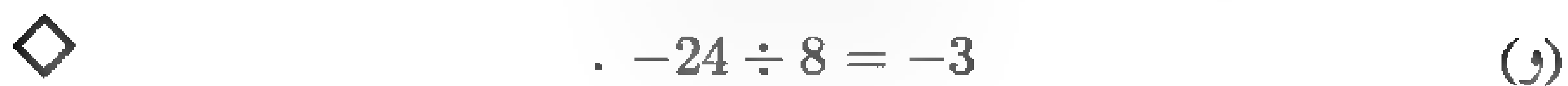
(ب) $-16 + -25 = -41$.

(ج) $-6 \times -5 = 30$.

(د) $6 \times -5 = -30$.

(هـ) $(-3)^2 \times (-2)^3 = -3 \times -3 \times -2 \times -2 \times -2$
$= -9 \times 8 = -72$

(و) $-24 \div 8 = -3$.



(١.٥) أولوية العمليات [Order of Operations]

عادة ما تحتوي الصيغ على أكثر من عملية حسابية واحدة ولذا لا بد من الاتفاق على أي من هذه العمليات يتم تنفيذها قبل العمليات الأخرى. ولكي نضمن صواب حساباتنا نتبع الترتيب التالي:

(١) نقوم بحساب ما داخل الأقواس. وإذا وجد أكثر من قوس نحسب ما داخل الأقواس الداخلية أولاً.

(٢) نقوم بحساب الحدود التي تحتوي على قوى.

(٣) نبدأ من اليسار إلى اليمين بحساب أي من عمليتي الضرب والقسمة.

(٤) نبدأ من اليسار إلى اليمين بحساب أي من عمليتي الجمع والطرح.

(٥) عند وجود علامة كسر فيجب حساب عمليات البسط والمقام أولاً ثم نجري عملية القسمة بعد ذلك.

مثال (٤) جد ناتج كل مما يلي:

(أ) $24 \times 8 \div (4-2)$ (ب) $18 - (6 \times 3) - 4$

(ج) $\left[(12 \times 3) \div (12 \div 3)\right] \times 2$ (د) $\dfrac{(3+8)-5}{3+(8-5)}$

الحل

(أ) $24 \times 8 \div (4-2) = 24 \times 8 \div 2 = 192 \div 2 = 96$

(ب) $18-(6\times 3)-4=18-18-4=0-4=-4$

(ج) $\left[(12\times 3)\div(12\div 3)\right]\times 2=\left[36\div 4\right]\times 2=9\times 2=18$

(د) $\frac{(3+8)-5}{3+(8-5)}=\frac{11-5}{3+3}=\frac{6}{6}=1$. ◇

(١.٦) الكسور والأعداد الكسرية

[Fractions and Rational Numbers]

الأعداد الكسرية هي الأعداد التي يمكن كتابتها كنسبة بين عددين صحيحين. أي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة: $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان و $b\neq 0$. على سبيل المثال، كل من الأعداد التالية هو عدد كسري:

$$3 \text{ ،} -4 \text{ ،} 0 \text{ ،} 30\% \text{ ،} \frac{15}{7} \text{ ،} 3.6$$

لأنه يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ كالتالي:

$$3=\frac{3}{1} \text{ ،} -4=-\frac{4}{1} \text{ ،} 0=\frac{0}{1} \text{ ،} 30\%=\frac{30}{100} \text{ ،} \frac{15}{7}=\frac{15}{7} \text{ ،} 3.6=\frac{36}{10}.$$

أما الكسر فهو عدد كسري $\frac{a}{b}$ حيث $b\neq 0$. يسمى العدد a بسط الكسر والعدد b مقام الكسر. مقلوب الكسر $\frac{a}{b}$ هو الكسر $\frac{b}{a}$.توجد عدة أنواع من الكسور هي:

الكسر الفعلي $\frac{a}{b}$ حيث البسط a أصغر من المقام b، مثل، $\frac{3}{4}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{25}{37}$.

الكسر غير الفعلي $\frac{a}{b}$ حيث البسط a أكبر من المقام b، مثل، $\frac{5}{3}$، $\frac{16}{11}$، $-\frac{5}{3}$.

العدد الكسري المخلوط $c\frac{a}{b}$ حيث c عدد صحيح و $\frac{a}{b}$ كسر، وهذا يعني أن $c\frac{a}{b} = c + \frac{a}{b}$. مثل، $4\frac{3}{5} = 4 + \frac{3}{5}$.

يكون الكسران متكافئين إذا استطعنا الحصول على أحدهما من الآخر بعدد منته من عمليات ضرب (أو قسمة) كل من البسط والمقام بالعدد نفسه. مثلاً،

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{6}{12} = \frac{30}{60}$$

يتم جمع (أو طرح) كسرين بإيجاد كسر مكافئ لكل منهما بحيث يكون مقاما الكسرين المكافئين متساويين ومن ثم نقوم بجمع (أو طرح) البسطين.

مثال (٥) جد ناتج كلاً مما يلي:

(أ) $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$ (ب) $2\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ (ج) $3\frac{1}{3} - 2\frac{4}{7}$ (د) $7 - 2\frac{1}{5}$

الحل

(أ) $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5+2}{9} = \frac{7}{9}$.

(ب)
$$2\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{11}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \times 11}{3 \times 4} + \frac{2 \times 5}{2 \times 6}$$
$$= \frac{33}{12} + \frac{10}{12} = \frac{33+10}{12} = \frac{43}{12} = 3\frac{7}{12}$$

لاحظ أن $LCM(4,6) = 12$. ولذا لتوحيد المقامين ضربنا المقام 4 بالعدد 3 والمقام 6 بالعدد 2. كما قمنا بتحويل الكسر المخلوط $2\frac{3}{4}$ إلى كسر غير فعلي قبل إجراء عملية الجمع.

(ج)

$$3\frac{1}{3}-2\frac{4}{7}=\frac{10}{3}-\frac{18}{7}=\frac{7\times 10}{7\times 3}-\frac{3\times 18}{3\times 7}$$
$$=\frac{70}{21}-\frac{54}{21}=\frac{70-54}{21}=\frac{16}{21}$$

(د)

$$7-2\frac{1}{5}=\frac{7}{1}-\frac{11}{5}=\frac{5\times 7}{5\times 1}-\frac{11}{5}$$
$$=\frac{35}{5}-\frac{11}{5}=\frac{35-11}{5}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$$

◇

يتم ضرب الكسرين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ وقسمتهما على النحو التالي:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

أي بضرب البسطين معاً والمقامين معاً.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

أي بإيجاد مقلوب المقسوم عليه وتحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب.

مثال (٦) احسب كلاً مما يلي:

(أ) $2\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}$ (ب) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$ (ج) $4\frac{1}{3}\div 2\frac{1}{3}$ (د) $\dfrac{3\times 7\times\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$

الحل

(أ)

$$2\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{9\times 3}{4\times 8}=\frac{27}{32}$$

(ب)

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2=3\frac{1}{2}\times 3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{7\times 7}{2\times 2}=\frac{49}{4}=12\frac{1}{4}$$

(ج)
$$4\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{3} = \frac{13}{3} \div \frac{7}{3} = \frac{13}{3} \times \frac{3}{7}$$
$$= \frac{13 \times 3}{3 \times 7} = \frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$$

لاحظ أننا قمنا باختصار العدد 3 من بسط الكسر $\frac{13 \times 3}{3 \times 7}$ مع العدد 3 من مقام الكسر وهذا جائز دائماً.

(د)
$$\frac{3 \times 7 \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = 3 \times 7 \times \frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{7}{1} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{3}$$
$$= \frac{3 \times 7 \times 2 \times 7}{1 \times 1 \times 5 \times 3} = \frac{7 \times 2 \times 7}{5} = \frac{98}{5} = 19\frac{3}{5}$$

◇

يظهر التعامل مع الكسور في العديد من المسائل الكلامية ونوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (٧) سعر سيارة هوندا يساوي $\frac{1}{4}$سعر سيارة BMW . إذا كان سعر سيارة الـــ BMW هو 360000 ريال فما هو سعر سيارة الهوندا ؟

الحل

سعر سيارة الهوندا هو $90000 = \frac{360000}{4} = 360000 \times \frac{1}{4}$ريال. ◇

مثال (٨)الدخل الشهري لعائلة هو 15000 ريال. تدفع العائلة $\frac{1}{3}$ الدخل أجرة سكن وتصرف على الطعام $\frac{1}{4}$ الدخل وتشتري ملابس بمقدار $\frac{1}{8}$ الدخل وتصرف

$\frac{1}{12}$ من الدخل على الترفيه وتدخر الباقي. ما هي قيمة ادخار العائلة الشهري ؟

الحل

مجموع مصاريف العائلة الشهري هو

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)\times 15000 = \frac{8+6+3+2}{24}\times 15000$$
$$= \frac{19}{24}\times 15000 = \frac{19\times 15000}{24} = 11875$$

لاحظ أن $\text{LCM}(3,4,8,12) = 24$.

إذن، ادخار العائلة الشهري هو $15000 - 11875 = 3125$ ريالاً. ◇

(١.٧) الأعداد العشرية [Decimal Numbers]

العدد العشري هو العدد الذي يحتوي على فواصل عشرية. يمكن استخدام العدد العشري للتعبير عن أجزاء الأعداد الصحيحة، فمثلاً، يمكن كتابة العدد 7.35 على صورة النشر الكسري $7+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$.

ويمكن كتابة هذا العدد أيضاً على شكل كسر غير فعلي $\frac{735}{100}$.

أو على شكل عدد مخلوط $7\frac{35}{100}$.

مثال (٩) جد ناتج كل مما يلي:

(أ) $13.21 + 16.82$ (ب) $5.7 - 3.2$ (ج) 13.7×0.8

(د) $500 \times (0.4)^2$

الحل

(أ) نقوم بجمع العددين على النحو التالي:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 13.21 \\ +16.82 \\ \hline 30.03 \end{array}$$

(ب)نقوم بطرح العددين على النحو التالي:

$$\begin{array}{r} 5.7 \\ -3.2 \\ \hline 2.5 \end{array}$$

(ج) لضرب عددين عشريين نقوم بضرب الأعداد دون فواصل عشرية ثم نضع الفواصل العشرية للعدد الناتج. حاصل ضرب العدد 8 بالعدد 137 هو 1096. إذن، $13.7 \times 0.8 = 10.96$.

(د) $500 \times (0.4)^2 = 500 \times 0.4 \times 0.4 = 500 \times 0.16 = 80.00$ ◇

(١.٨) الصيغ الجبرية [Algebraic Expresions]

يعد الجبر من أهم مواضيع الرياضيات حيث نستخدم الرموز للتعبير عن قيم مجهولة أو متغيرات كما أننا نستخدم الجبر لإنشاء صيغ رياضية لمساعدتنا في حل الكثير من المسائل الكلامية. على سبيل المثال، إذا رمزنا لطول ضلع مستطيل بالرمز x ولعرضه بالرمز y ولمساحته بالرمز A فيمكن التعبير عن مساحته بالمعادلة $A = x \times y$ أو $A = xy$.

تسمى الصيغ التي تحتوي على متغيرات أو مجاهيل بالصيغ الرياضية أو الجبرية ولإيجاد قيمتها عند قيم معينة نقوم بتعويض هذه القيم في الصيغة وحساب الناتج.

فمثلاً، نجد مساحة المستطيل الذي طوله يساوي 8 وعرضه يساوي 5 على النحو التالي:

$$A = xy = 8 \times 5 = 40$$

وإذا أردنا إيجاد قيمة الصيغة $2x + 5y$ عندما يكون $x = -2$ و $y = 3$ نقوم بتعويض القيم لنجد أن

$$2x + 5y = 2 \times (-2) + 5 \times 3 = -4 + 15 = 11$$

عند التعامل مع الصيغ الجبرية يكون من المناسب تبسيط الصيغة وذلك بما يسمى تجميع الحدود المتشابهة، فمثلاً، الحدان $3x$ و $-2x$ متشابهان، كذلك الحدان $3xy$ و $-2xy$ والحدان $3x^2$ و $-2x^2$ وهكذا.

مثال (١٠) بسط الصيغ الجبرية التالية:

(أ) $2xy + 3xy$ (ب) $xy + 4 - 5xy + 2$

(ج) $6x + 2y - 2x + 7y$ (د) $6x^2 + 2x - x^2 - 3x$

الحل

(أ) $2xy + 3xy = 5xy$.

(ب) $xy + 4 - 5xy + 2 = (xy - 5xy) + (4 + 2) = -4xy + 6$.

(ج) $6x + 2y - 2x + 7y = (6x - 2x) + (2y + 7y) = 4x + 9y$.

(د) $6x^2 + 2x - x^2 - 3x = \left(6x^2 - x^2\right) + (2x - 3x) = 5x^2 - x$. ◇

(١.٩) القوى [Exponents]

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فالتعبير a^n كما ذكرنا سابقاً يعني حاصل ضرب a بنفسه n من المرات. فمثلاً،

$$a^2 = a \times a$$
$$a^3 = a \times a \times a$$

وهكذا.

يسمى العدد a الأساس ويسمى العدد n الأس (أو القوة). عند ضرب وقسمة مقادير تحتوي على قوى نستخدم القواعد التالية:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{حيث } a \neq 0$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1 \qquad \text{حيث } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{حيث } a \neq 0$$

لاحظ أن لدينا الحالة الخاصة عندما يكون $n = 1$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \text{حيث } a \neq 0$$

مثال (١١) بسط كلاً مما يلي:

(أ) $3^3 \times 3^5$ (ب) $x^5 \times x$ (ج) $3^5 \div 3^3$ (د) $\left(x^2\right)^3 \times x^2$

الحل

(أ) $3^3 \times 3^5 = 3^{3+5} = 3^8$.

(ب) $x^5 \times x = x^{5+1} = x^6$.

(ج) $3^5 \div 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$.

(د) $\left(x^2\right)^3 \times x^2 = x^6 \times x^2 = x^{6+2} = x^8$. ◇

مثال (١٢) بسط كلاً مما يلي:

(أ) $\left(\dfrac{x^3}{2y}\right)^2$ (ب) $\dfrac{\left(3x^2y^3\right)^2}{y^3}$

الحل

(أ) $\left(\dfrac{x^3}{2y}\right)^2 = \dfrac{x^{3\times2}}{(2y)^2} = \dfrac{x^6}{4y^2}$.

(ب) $\dfrac{\left(3x^2y^3\right)^2}{y^3} = \dfrac{9x^4y^6}{y^3} = 9x^4y^3$. ◇

(١٠.١) الجذور التربيعية والتكعيبية [Square and Cubic Roots]

نعلم أن $3^2 = 3\times3$ وتُقرأ "3 تربيع" كما أن $9 = 3^2$. في هذه الحالة نقول إن الجذر التربيعي للعدد 9 هو 3 ونكتب $3 = \sqrt{9}$.

ولهذا فإن إيجاد الجذر التربيعي لعدد هو العملية العكسية لتربيع العدد.

إذا كان $a \geq 0$ فإننا نستطيع إيجاد $\sqrt{a}$. إما إذا كان $a < 0$ فلا يوجد جذر تربيعي حقيقي للعدد a. لاحظ أيضاً أن $\sqrt{a} \geq 0$.

إن عملية إيجاد الجذر التربيعي للأعداد 1، 4، 9، 16، 25، 36 عملية سهلة ولكن إيجاد الجذر التربيعي لعدد مثل 6 ليس بالأمر اليسير. في الحقيقة، العدد $\sqrt{6}$ هو مثال على أعداد تسمى أعداداً غير كسرية وهذه الأعداد هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الصورة $\dfrac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان، $b \neq 0$.

مثال (١٣) جد عددين صحيحين متتاليين بحيث يقع $\sqrt{29}$ بينهما.

الحل

لاحظ أن $5 = \sqrt{25}$ و $6 = \sqrt{36}$ وأن $25 < 29 < 36$.

إذن، $\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$. أي أن $5 < \sqrt{29} < 6$.

ولهذا فإن $\sqrt{29}$ يقع بين العددين 5 و 6. ◇

عند تبسيط الصيغ الجبرية التي تحتوي على جذور تربيعية نستخدم القواعد التالية:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x}\sqrt{x} = x$$ لكل عدد صحيح موجب x.

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$$ حيث x و y موجبان.

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$ حيث x و y موجبان.

مثال (١٤) بسط كلاً مما يلي:

(أ) $\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{13}}$ (ب) $\left(3\sqrt{7}\right)^2$ (ج) $\sqrt{80}$ (د) $\sqrt{112}$

الحل

(أ) $\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{39}{13}} = \sqrt{3}$.

(ب) $\left(3\sqrt{7}\right)^2 = 3\sqrt{7} \times 3\sqrt{7} = 9\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 97 = 63$.

(ج) $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16}\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

(د) $\sqrt{112} = \sqrt{16 \times 7} = \sqrt{16}\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$. ◇

لاحظ أن $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ وتقرأ "2 تكعيب" وأن $8 = 2^3$. في هذه الحالة نقول إن 2 هو الجذر التكعيبي للعدد 8 ونكتب $2 = \sqrt[3]{8}$. فمثلاً، $\sqrt[3]{-8} = -2$ و $3 = \sqrt[3]{27}$ وهكذا.

(١.١١) مسائل محلولة

(١) أي من الأعداد التالية هو الأقرب إلى العدد $\frac{3.9 \times 32}{15.7}$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 8 (د) 80

(٢) أي من الأعداد التالية هو الأقرب إلى العدد 3.96×4.141 ؟

(أ) 12 (ب) 15 (ج) 16 (د) 18

(٣) أي من الأعداد التالية هو الأقرب إلى العدد $901 \div 0.303$ ؟

(أ) 2000 (ب) 3000 (ج) 4000 (د) 6000

(٤) أي من الأعداد التالية هو الأقرب إلى العدد $69.8 \div 0.7$ ؟

(أ) 70 (ب) 100 (ج) 150 (د) 200

(٥) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$ يساوي:

(أ) $\frac{3}{10}$ (ب) $\frac{1}{15}$ (ج) $\frac{1}{5}$ (د) $\frac{9}{5}$

(٦) $\frac{2}{5} \div 4\frac{2}{3}$ يساوي:

(أ) $11\frac{2}{3}$ (ب) $12\frac{2}{3}$ (ج) $13\frac{1}{3}$ (د) $14\frac{1}{3}$

(٧) $3\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{3}$ يساوي:

(أ) $\frac{22}{45}$ (ب) $\frac{23}{2}$ (ج) $\frac{26}{45}$ (د) $\frac{28}{45}$

(٨) $\dfrac{\frac{2}{7} + \frac{7}{2}}{\frac{53}{21}}$ يساوي:

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{7}{3}$ (د) $\frac{10}{3}$

(٩) المقدار $\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{119}{120}$ (ج) $1\frac{1}{120}$ (د) 120

(١٠) $\left(\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\right)+\frac{4}{5}$ يساوي:

(أ) $\frac{43}{50}$ (ب) $\frac{47}{50}$ (ج) 1 (د) $1\frac{1}{50}$

(١١) العدد الذي يقع في الوسط بين العددين $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{10}$ هو:

(أ) $\frac{19}{180}$ (ب) $\frac{9}{80}$ (ج) $\frac{1}{40}$ (د) $\frac{1}{9}$

(١٢) قسمنا قطعة من الحلوى بين أربعة أطفال، أخذ الطفل الأول $\frac{1}{4}$ القطعة وأخذ الطفل الثاني $\frac{1}{3}$ القطعة وأخذ الطفل الثالث $\frac{1}{6}$ القطعة. ما الجزء الذي كان من نصيب الطفل الرابع ؟

(أ) $\frac{1}{7}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$

(١٣) المقدار $\dfrac{6\times3\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) 6 (د) 12

(١٤) سجل أحد لاعبي نادي الهلال $\frac{2}{5}$ أهداف النادي خلال مباريات الدوري

السعودي. إذا كان عدد الأهداف الذي سجلها نادي الهلال في جميع المباريات التي لعبها هو 30 هدفاً فما عدد الأهداف الذي سجلها اللاعب ؟

(أ) 6 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12

(١٥) $\frac{9}{10}$ وزن رغيف الخبز هو الدقيق المستخدم في تكوينه و $\frac{2}{9}$ وزن الدقيق هو بروتين. ما وزن البروتين في رغيف الخبز ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{5}$

(١٦) إذا كتبنا العدد $\frac{28}{11}$ على الصورة $2+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ فإن $a+b+c$ يساوي:

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

(١٧) المقدار 3000×3000^{3000} يساوي:

(أ) 9000 (ب) 3000^{3000} (ج) 9000^{3000} (د) 3000^{3001}

(١٨) المقدار $27^2 \times 3^4$ يساوي:

(أ) 27^6 (ب) 27^8 (ج) 3^{10} (د) 3^{12}

(١٩) إذا كان $a = 3^{200}$، $b = 4^{125}$، $c = 5^{100}$، $d = 2^{300}$ فإن:

(أ) $c < b < d < a$ (ب) $c < d < b < a$

(ج) $a < b < d < c$ (د) $d < b < c < a$

(٢٠) إذا كان $p = \frac{0.1}{0.3}$، $q = \frac{1}{0.3}$، $r = \frac{0.3}{1}$ فما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية:

(أ) $q > r$ و $p > q$ (ب) $r > p$ و $q > r$

(ج) $p > r$ و $q > p$ (د) $p > q$ و $r > p$

(٢١) الجذر التربيعي للعدد $35 \times 14 \times 10$ هو

(أ) 50 (ب) 60 (ج) 70 (د) 100

(٢٢) عدد الطرق المختلفة لكتابة العدد 24 كمجموع عددين أوليين هو

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٢٣) [AJHSME 1985]المقدار $\frac{7 \times 9 \times 11}{3 \times 5 \times 7} \times \frac{3 \times 5}{9 \times 11}$ يساوي:

(أ) 1 (ب) 0 (ج) 49 (د) $\frac{1}{49}$

(٢٤) [AJHSME 1985]

$99 + 98 + 97 + 96 + 95 + 94 + 93 + 92 + 91 + 90$ يساوي:

(أ) 845 (ب) 945 (ج) 1005 (د) 1045

(٢٥) [AJHSME 1985]المقدار $\frac{10^7}{5 \times 10^4}$ يساوي

(أ) 0.002 (ب) 0.2 (ج) 20 (د) 200

(٢٦) [AJHSME 1985]

إذا كان $a = -2$ فما أكبر أعداد المجموعة $\left\{-3a, 4a, \frac{24}{a}, a^2, 3a\right\}$ ؟

(أ) $-3a$ (ب) $4a$ (ج) $\frac{24}{a}$ (د) a^2

(٢٧) [AJHSME 1986] أي من الأعداد التالية له أكبر مقلوب ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) 1 (د) 5

(٢٨) [AJHSME 1986] قيمة المقدار $(40.3 + 0.07)(1.8)$ أقرب إلى

(أ) 7 (ب) 42 (ج) 74 (د) 84

(٢٩) [AJHSME 1986] قيمة المقدار $\dfrac{2}{1-\dfrac{2}{3}}$ هي

(أ) -3 (ب) $-\frac{4}{3}$ (ج) 2 (د) 6

(٣٠) [AJHSME 1986] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة بين العددين $\sqrt{8}$ و $\sqrt{80}$ ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

(٣١) [AJHSME 1986] إذا كانت B مرتبة (خانة) في عملية الضرب

$$\begin{array}{r} B2 \\ \times\ 7B \\ \hline 6396 \end{array}$$

فإن قيمة B تساوي:

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8

(٣٢) [AJHSME 1986] إذا كان $A * B = \dfrac{A+B}{2}$ فإن $(3*5)*8$ يساوي:

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 10 (د) 12

(٣٣) [AJHSME 1986] إذا كان $200 \le a \le 400$ وكان $600 \le b \le 1200$ فأعلى قيمة لخارج القسمة $\dfrac{b}{a}$ هي:

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 30 (د) 300

(٣٤) [AJHSME 1987] المقدار $0.4 + 0.02 + 0.006$ يساوي:

(أ) 0.012 (ب) 0.066 (ج) 0.24 (د) 0.426

(٣٥) [AJHSME 1987] قيمة الكسر $\frac{2}{25}$ تساوي:

(أ) 0.008 (ب) 0.08 (ج) 0.8 (د) 0.25

(٣٦) [AJHSME 1987] المقدار

$$2(81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99)$$

يساوي:

(أ) 1500 (ب) 1600 (ج) 1700 (د) 1800

(٣٧) [AJHSME 1987] عند إجراء عملية الجمع

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

يكون المضاعف المشترك الأصغر للمقام الذي نستخدمه في عملية الجمع هو

(أ) 120 (ب) 210 (ج) 420 (د) 840

(٣٨) [AJHSME 1987] قيمة المجموع $2\frac{1}{7} + 3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{19}$ تقع:

(أ) بين 10و $10\frac{1}{2}$ (ب) بين $10\frac{1}{2}$ و 11

(ج) بين 11 و $11\frac{1}{2}$ (د) بين $11\frac{1}{2}$ و 12.

(٣٩) [AJHSME 1987] ما الكسر الأكبر من بين الكسور

(أ) $\frac{3}{7}$ (ب) $\frac{17}{35}$ (ج) $\frac{19}{39}$ (د) $\frac{151}{301}$

(٤٠) [AJHSME 1987] لنفرض أن العملية n^* تعني مقلوب n. فمثلاً،

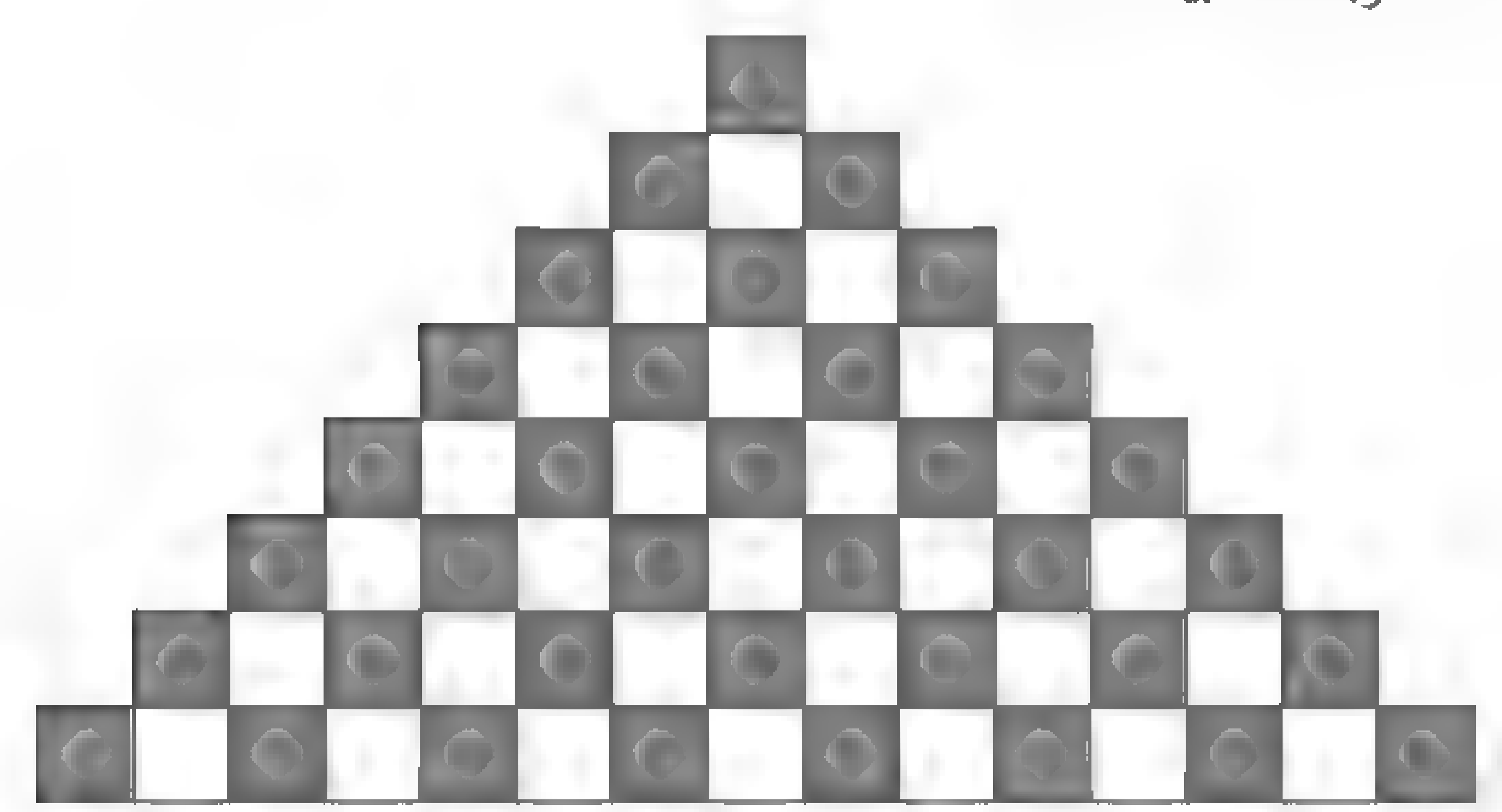
$5^* = \frac{1}{5}$. كم عدد العبارات الصائبة من بين العبارات التالية ؟

(١) $3^* + 6^* = 9^*$ (٢) $6^* - 4^* = 2^*$

(٣) $2^* \times 6^* = 12^*$ (٤) $10^* \div 2^* = 5^*$

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٤١) [AJHSME 1988] في الهرم المرفق، ما الزيادة في عدد المربعات السوداء عن عدد المربعات البيضاء ؟



(أ) 7 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10

(٤٢) [AJHSME 1988] أثناء استخدام سعاد الآلة الحاسبة لايجاد حاصل الضرب 0.075×2.56 نسيت إدخال مفتاح الفواصل ولهذا كانت الإجابة التي ظهرت على شاشة الآلة الحاسبة هي 19200. ما الإجابة الصحيحة لحاصل الضرب ؟

(أ) 0.0192 (ب) 0.192 (ج) 1.92 (د) 19.2

(٤٣) [AJHSME 1988] العدد $\sqrt{164}$:

(أ) 42 (ب) أصغر من 10 (ج) بين 10 و 11 (د) بين 12 و 13

(٤٤) [AJHSME 1988] إذا كان $\Diamond$ و $\triangle$ عددين صحيحين موجبين حيث $36 = \triangle \times \Diamond$ فأكبر قيمة ممكنة للعدد $\triangle + \Diamond$ هي

(أ) 12 (ب) 13 (ج) 15 (د) 37

(٤٥) [AJHSME 1989] المقدار

$(9 + 19 + 29 + 39 + 49) + (1 + 11 + 21 + 31 + 41)$ يساوي

(أ) 150 (ب) 199 (ج) 200 (د) 250

(٤٦) [AJHSME 1989] ما العدد الأكبر من بين الأعداد ؟

(أ) 0.99 (ب) 0.9099 (ج) 0.9 (د) 0.909

(٤٧) [AJHSME 1989] المقدار $-15 + 9 \times (6 \div 3)$ يساوي

(أ) -48 (ب) -12 (ج) -3 (د) 3

(٤٨) [AJHSME 1988] بفرض أن المسافات بين العلامات المبينة على خط الأعداد متساوية، ما قيمة y ؟

0 y 20

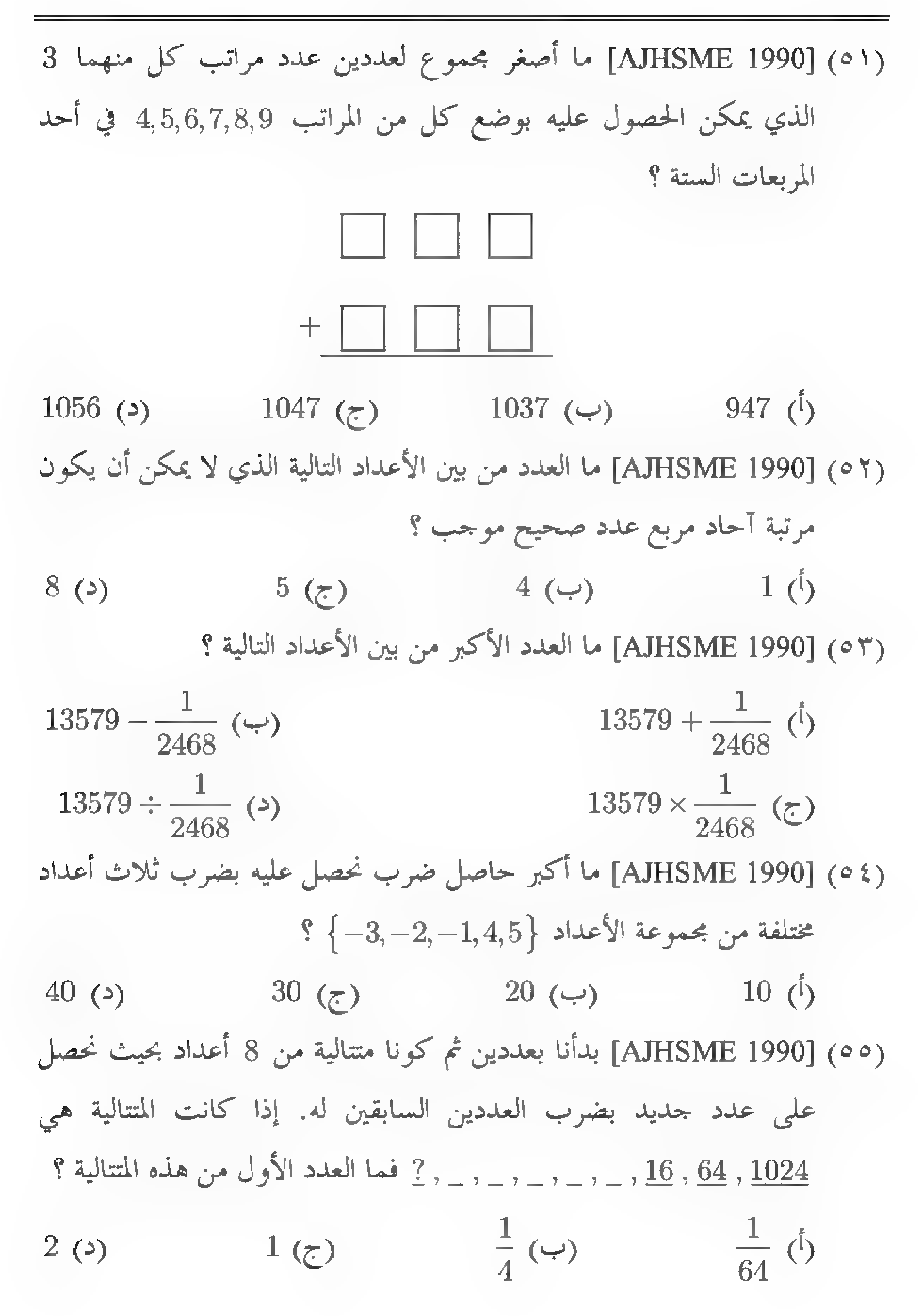
(أ) 3 (ب) 10 (ج) 12 (د) 15

(٤٩) [AJHSME 1989] المقدار $(2 \times 3 \times 4)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ يساوي

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 9 (د) 26

(٥٠) [AJHSME 1989] قيمة المقدار $\dfrac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}}$ تساوي

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$



(٥١) [AJHSME 1990] ما أصغر مجموع لعددين عدد مراتب كل منهما 3 الذي يمكن الحصول عليه بوضع كل من المراتب 4,5,6,7,8,9 في أحد المربعات الستة ؟

$$\begin{array}{r} \square\,\square\,\square \\ +\,\square\,\square\,\square \\ \hline \end{array}$$

(أ) 947 (ب) 1037 (ج) 1047 (د) 1056

(٥٢) [AJHSME 1990] ما العدد من بين الأعداد التالية الذي لا يمكن أن يكون مرتبة آحاد مربع عدد صحيح موجب ؟

(أ) 1 (ب) 4 (ج) 5 (د) 8

(٥٣) [AJHSME 1990] ما العدد الأكبر من بين الأعداد التالية ؟

(أ) $13579 + \dfrac{1}{2468}$ (ب) $13579 - \dfrac{1}{2468}$

(ج) $13579 \times \dfrac{1}{2468}$ (د) $13579 \div \dfrac{1}{2468}$

(٥٤) [AJHSME 1990] ما أكبر حاصل ضرب نحصل عليه بضرب ثلاث أعداد مختلفة من مجموعة الأعداد $\{-3,-2,-1,4,5\}$ ؟

(أ) 10 (ب) 20 (ج) 30 (د) 40

(٥٥) [AJHSME 1990] بدأنا بعددين ثم كونا متتالية من 8 أعداد بحيث نحصل على عدد جديد بضرب العددين السابقين له. إذا كانت المتتالية هي $\underline{1024}$, $\underline{64}$, $\underline{16}$, _ , _ , _ , _ , _ , $\underline{?}$ فما العدد الأول من هذه المتتالية ؟

(أ) $\dfrac{1}{64}$ (ب) $\dfrac{1}{4}$ (ج) 1 (د) 2

(٥٦) [AJHSME 1991] إذا كان

$$991 + 993 + 995 + 997 + 999 = 5000 - N$$

فما قيمة N ؟

(أ) 5 (ب) 10 (ج) 15 (د) 25

(٥٧) [AJHSME 1991] ما هو أكبر خارج قسمة نحصل عليه بقسمة عددين من أعداد المجموعة $\{-24, -3, -2, 2, 8\}$ ؟

(أ) -24 (ب) -3 (ج) 8 (د) 12

(٥٨) [AJHSME 1991] ما عدد الأعداد الصحيحة من 1 إلى 46 التي تقبل القسمة على العدد 3 أو العدد 5 أو كليهما ؟

(أ) 18 (ب) 21 (ج) 24 (د) 25

(٥٩) [AJHSME 1991] ما عدد الأصفار في بداية ناتج حاصل الضرب $25 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 \times 8 \times 8 \times 8$ ؟

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 10

(٦٠) [AJHSME 1991] في مسألة الجمع التالية استبدلنا المراتب بأحرف من الهجائية بحيث تقابل المراتب المختلفة أحرفاً مختلفة.

$$\begin{array}{r} ABC \\ AB \\ + \quad A \\ \hline 300 \end{array}$$

ما قيمة C ؟

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7 (هـ) 9

(٦١) [AJHSME 1992] ما العدد من بين الأعداد التالية الذي لا يساوي $\frac{5}{4}$ ؟

(أ) $\frac{10}{8}$ (ب) $1\frac{1}{4}$ (ج) $1\frac{3}{12}$ (د) $1\frac{1}{5}$

(٦٢) [AJHSME 1992] ما أكبر فرق نحصل عليه بطرح عددين من أعداد المجموعة $\{-16,-4,0,2,4,12\}$ ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 16 (د) 28

(٦٣) [AJHSME 1992] لنفرض $\overset{a}{b\quad c}$ أنيعني $a+b-c$. ماذا يساوي المجموع $\overset{2}{5\quad 6}+\overset{1}{3\quad 4}$ ؟

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 0 (د) 1

(٦٤) [AJHSME 1993] ما العدد الذي له أكبر قاسم أولي ؟

(أ) 39 (ب) 51 (ج) 77 (د) 91

(٦٥) [AJHSME 1993] العملية $*$ معرفة بالجدول التالي:

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

فمثلاً، $3*2=1$. عندئذ، $(2*4)*(1*3)$ يساوي

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٦٦) [AJHSME 1993] إذا استخدمنا كلاً من العمليات $+$ ، $-$ ، $\times$ مرة واحدة فقط في الفراغات المبينة

$$5\square 4\square 6\square 3$$

فإن قيمة المقدار يمكن أن تساوي:

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 15 (د) 19

(٦٧) إذا وضعنا الأعداد $1,2,3$ بمربعات الجدول المبين بحيث يحتوي كل صف وكل عمود على جميع الأعداد $1,2,3$ فإن $A+B$ يساوي:

1		
	2	A
		B

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٦٨) [AJHSME 1993] المقدار $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}$ يساوي

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{3}{10}$ (ج) $\frac{7}{10}$ (د) $\frac{5}{6}$

(٦٩) [AJHSME 1993] إذا عبرنا عن المقدار $10^{93}-93$ كعدد صحيح فإن مجموع مراتبه تساوي

(أ) 10 (ب) 93 (ج) 819 (د) 826

(٧٠) [AJHSME 1994] المجموع

$\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}+\frac{55}{10}$ يساوي

(أ) $4\frac{1}{2}$ (ب) 6.4 (ج) 9 (د) 10

(٧١) [AJHSME 1994] ما مرتبة الآحاد لحاصل ضرب ستة أعداد صحيحة متتالية ؟

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 4 (د) 6

(٧٢) [AJHSME 1994] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة N التي تجعل العدد $\frac{36}{N+2}$ صحيحاً ؟

(أ) 7 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10

(٧٣) [AJHSME 1994] لنفرض أن W، X، Y، Z أربع أعداد مختلفة من بين أعداد المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. إذا كان المجموع $\frac{W}{X}+\frac{Y}{Z}$ أصغر ما يمكن فإن $\frac{W}{X}+\frac{Y}{Z}$ يساوي:

(أ) $\frac{2}{17}$ (ب) $\frac{3}{17}$ (ج) $\frac{17}{72}$ (د) $\frac{25}{72}$

(٧٤) [AJHSME 1994] إذا كانت X، Y، Z ثلاثة مراتب مختلفة فأكبر مجموع مكون من ثلاث مراتب نحصل عليه باجراء عملية الجمع

$$\begin{array}{cccc} & X & X & X \\ & & Y & X \\ + & & & X \\ \hline \end{array}$$

يأخذ الشكل

(أ) XXY (ب) XYZ (ج) YYX (د) YYZ

(٧٥) [AJHSME 1995] يملك أحمد قطعة نقود واحدة من كل من الفئات التالية: 1 ريال، 5 ريالات، 10 ريالات، 20 ريالاً. ما النسبة المئوية لما يملكه أحمد إلى قطعة نقود من فئة الخمسين ريال ؟

(أ) 36%　　(ب) 40%　　(ج) 60%　　(د) 72%

(٧٦) [AJHSME 1995] إذا ضربنا عدداً بالعدد $\frac{3}{4}$ ثم قسمنا الناتج على العدد $\frac{3}{5}$ فما العملية المكافئة لذلك من بين العمليات التالية ؟

(أ) قسمة العدد على $\frac{4}{3}$　　(ب) قسمة العدد على $\frac{9}{20}$

(ج) ضرب العدد بالعدد $\frac{9}{20}$　　(د) ضرب العدد بالعدد $\frac{5}{4}$

.

(٧٧) [AJHSME 1995] ما المرتبة المائة التي تقع على يمين الفاصلة العشرية في التمثيل العشري للعدد $\frac{4}{37}$ ؟

(أ) 0　　(ب) 1　　(ج) 2　　(د) 7

(٧٨) [AJHSME 1995] إذا كتبنا العدد 6545 كحاصل ضرب عددين صحيحين موجبين كل منهما يتكون من مرتبتين فما مجموع هذان العددان ؟

(أ) 162　　(ب) 172　　(ج) 173　　(د) 174

(٧٩) [AJHSME 1996] ما عدد القواسم الموجبة للعدد 36 التي تكون مضاعفات للعدد 4 ؟

(أ) 2　　(ب) 3　　(ج) 4　　(د) 5

(٨٠) [AJHSME 1996] ما أصغر عدد يمكن الحصول عليه بعد إجراء العمليات التالية ؟

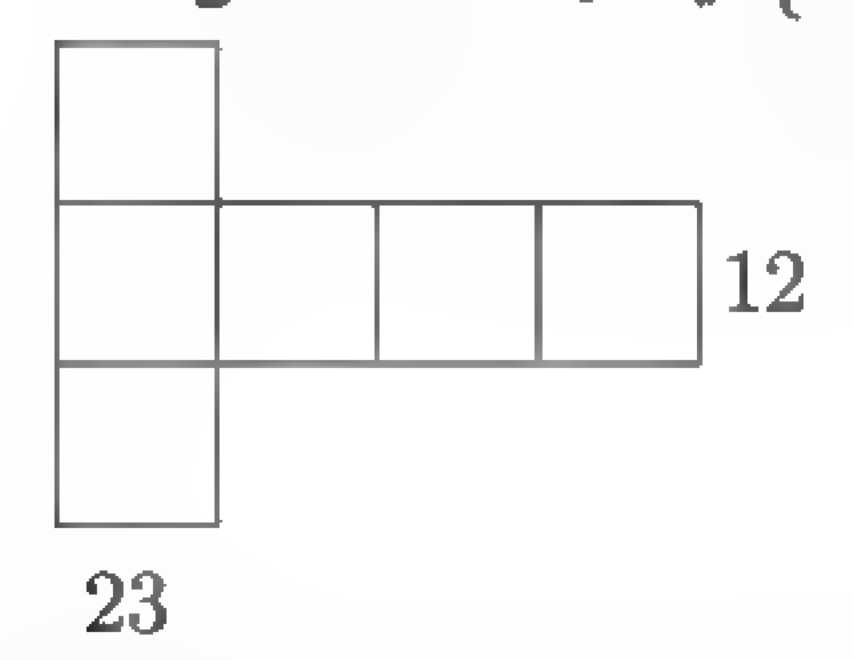
اختر ثلاثة أعداد مختلفة من المجموعة $\{3,5,7,11,13,17\}$. اجمع عددين منهما. جد حاصل ضرب العدد الثالث مع مجموع العددين.

(أ) 15 (ب) 30 (ج) 36 (د) 50

(٨١) [AJHSME 1996] المسافة بين النقطتين A و B تساوي 10 وحدات وبين B و C تساوي 4 وحدات وبين C و D تساوي 3 وحدات. إذا كانت النقطتين A و D أقرب ما يمكن لبعضهما فإن المسافة بينهما تساوي:

(أ) 0 (ب) 3 (ج) 9 (د) 11

(٨٢) [AJHSME 1996] كتبنا ستة أعداد مختلفة من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ في مربعات الشكل



بحيث يكون مجموع أعداد العمود يساوي 23 ومجموع أعداد الصف يساوي 12 . ما مجموع الأعداد الستة التي استخدمت لهذا الغرض ؟

(أ) 27 (ب) 29 (ج) 31 (د) 33

(٨٣) [AJHSME 1996] باقي قسمة العدد $1492 \times 1776 \times 1812 \times 1996$ على العدد 5 هو

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 4

(٨٤) [AJHSME 1996] لنفرض أن آلة حاسبة تحتوي على مفتاح $\frac{1}{1-x}$. أي إذا كان العدد الظاهر على الشاشة هو x، وضغطنا المفتاح سيظهر العدد $\frac{1}{1-x}$ على الشاشة. فمثلاً، إذا كان العدد الظاهر على الشاشة هو 2 فالعدد الذي يظهر بعد الضغط على المفتاح هو $-1 = \frac{1}{-1} = \frac{1}{1-2}$.
لنفرض الآن أن العدد الظاهر على الشاشة هو 5 وقمنا بضغط المفتاح $\frac{1}{1-x}$ مائة مرة متتالية فما العدد الذي سيظهر على الشاشة بعد ذلك ؟

(أ) -0.25 (ب) 0 (ج) 0.8 (د) 1.25

(٨٥) [AJHSME 1997] توجد أعداد صحيحة موجبة تحقق:

- مجموع مربعات مراتبها يساوي 50.
- كل مرتبة أكبر من المرتبة التي على يسارها.

لنفرض أن N هو أكبر هذه الأعداد الصحيحة الموجبة. حاصل ضرب مراتب N يساوي:

(أ) 7 (ب) 25 (ج) 36 (د) 48

(٨٦) [AJHSME 1997] إذا ضربنا جميع الأعداد الزوجية من 2 ألى 98 ما عدا الأعداد التي مرتبة آحادها 0 فما هي مرتبة آحاد العدد الذي نحصل عليه ؟

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 4 (د) 6

(٨٧) [AJHSME 1998] إذا كان $x = 7$ فما أصغر قيمة من بين القيم التالية ؟

(أ) $\frac{6}{x}$ (ب) $\frac{6}{x+1}$ (ج) $\frac{6}{x-1}$ (د) $\frac{x}{6}$

(٨٨) [AJHSME 1998] إذا كان $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} = ad - bc$ فإن قيمة المقدار $\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

تساوي:

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 0 (د) 2

(٨٩) [AJHSME 1998] ما العدد الأكبر من بين الأعداد التالية ؟

(أ) 9.12344 (ب) $9.123\overline{4}$ (ج) $9.12\overline{34}$ (د) $9.1\overline{234}$

(٩٠) [AJHSME 1998] لهاني 3 أخوات و 5 أخوة. ولأخته هناء S أخت و B أخ. ما حاصل ضرب S و B ؟ (الأخوة و الأخوات لهم الأب و الأم نفسهما) ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 15

(٩١) [AJHSME 1998] أنشأ عبدالرحمن متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة وذلك باختيار عدد صحيح موجب ثم تطبيق احدى القواعد التالية:

(١) إذا كان العدد أصغر من 10 يقوم بضرب العدد بالعدد 9.

(٢) إذا كان العدد زوجياً وأكبر من 9 يقسم العدد على 2.

(٣) إذا كان العدد فردياً وأكبر من 9 يطرح منه 5.

ما الحد 98 من المتتالية... , 49 , 98 التي أنشأها أحمد بتطبيق القواعد الثلاث ؟

(أ) 6 (ب) 11 (ج) 22 (د) 27

(٩٢) $5 = (1 - 2) - 4 + (3 ? 6)$ [AMC8 1999]. لكي تكون المساواة صحيحة فيجب استبدال علامة الاستفهام بين العددين 3 و 6 بالعملية:

(أ) $\div$ (ب) $\times$ (ج) $+$ (د) $-$

(٩٣) [AMC8 1999] ثمن ثلاث سمكات يساوي ثمن 2 كغم من اللحم وثمن 1 كغم من اللحم يساوي 4 أكياس من الأرز. كم كيساً من الأرز يساوي سمكة واحدة ؟

(أ) $\frac{3}{8}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $2\frac{2}{3}$

(٩٤) [AMC8 2000] العدد 64 يقبل القسمة على مرتبة آحاده. ما عدد الأعداد الصحيحة بين 10 و 50 التي تتمتع بهذه الخاصية ؟

(أ) 15 (ب) 16 (ج) 17 (د) 18

(٩٥) [AMC8 2000] ما مرتبة آحاد المجموع $19^{19} + 99^{99}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 8

(٩٦) [AMC8 2002] العام 2002 هو عدد بالندروم (عدد يقرأ طرداً وعكساً). ما حاصل ضرب مراتب العام البالندروم الذي يأتي بعد العام 2002 ؟

(أ) 0 (ب) 4 (ج) 9 (د) 16

(٩٧) [AMC8 2003] ركب مجموعة من الأطفال دراجات ذات عجلين وذات ثلاثة عجلات. أثناء مرور الأطفال من أمام بيت السيد حسام لاحظ أن عدد الأطفال يساوي 7 وعدد العجلات يساوي 19. ما عدد الدراجات ذات الثلاث عجلات ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٩٨) [AMC8 2003] في عملية الجمع التالية، تقابل الأحرف مراتب مختلفة. إذا كان $T = 7$ و الحرف O يقابل عدداً زوجياً فما العدد الوحيد الذي يقابل W ؟

$$T\,W\,O$$

$$\begin{array}{r} + \quad TWO \\ \hline FOUR \end{array}$$

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٩٩) [AMC8 2003] ما عدد الأعداد الصحيحة بين 1000 و 2000 التي تقبل القسمة على كل من الأعداد 15 و 20 و 25 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(١٠٠) [AMC8 2004] خارطة تستخدم مقياس الرسم التالي: كل 12 سم تقابل 72 كم. ما عدد الكيلومترات الذي يقابل 17 سم على الخارطة ؟

(أ) 6 (ب) 102 (ج) 204 (د) 864

(١.١٢) حلول المسائل

(١) الإجابة هي (ج):

$$\frac{3.9\times 32}{15.7}\approx\frac{4\times 32}{16}=8.$$

(٢) الإجابة هي (ج):

$$3.96\times 4.141\approx 4\times 4=16.$$

(٣) الإجابة هي (ب):

$$901\div 0.303\approx 900\div 0.3=9000\div 3=3000$$

(٤) الإجابة هي (ب):

$$69.8\div 0.7\approx 70\div 0.7=100.$$

(٥) الإجابة هي (ج):

$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1\times 3}{3\times 5}=\frac{1}{5}.$$

(٦) الإجابة هي (أ):

$$4\frac{2}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{14}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{14\times 5}{3\times 2}=\frac{2\times 7\times 5}{3\times 2}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}.$$

(٧) الإجابة هي (د):

$$2\frac{1}{3}\div 3\frac{3}{4}=\frac{7}{3}\div\frac{15}{4}=\frac{7}{3}\times\frac{4}{15}=\frac{28}{45}.$$

(٨) الإجابة هي (ب):

$$\frac{\frac{2}{7}+\frac{7}{2}}{\frac{53}{21}}=\frac{\frac{4+49}{14}}{\frac{53}{21}}=\frac{53}{14}\times\frac{21}{53}=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$$

(٩) الإجابة هي (أ): المقدار يساوي

$$.\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

(١٠) الإجابة هي (أ):

$$.\frac{4}{5}+\left(\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}+\frac{3}{50}=\frac{40+3}{50}=\frac{43}{50}$$

(١١) الإجابة هي (أ): العدد الأوسط هو

$$.\frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{10+9}{90}\right)=\frac{19}{180}$$

(١٢) الإجابة هي (ج): مجموع الأجزاء الذي أخذها الثلاثة أطفال هو

$$.\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+4+2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

نصيب الطفل الرابع هو

$$.1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

(١٣) الإجابة هي (د):

$$.\frac{6\times3\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{6\times3\times1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{18}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{9}{\frac{3}{4}}=9\times\frac{4}{3}=12$$

(١٤) الإجابة هي (د): عدد الأهداف التي سجلها اللاعب هو

$$.\frac{2}{5}\times30=2\times6=12$$

(١٥) الإجابة هي (د): جزء البروتين هو

$$.\frac{9}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(١٦) الإجابة هي (ج):

$$\begin{aligned}\frac{28}{11} &= 2+\frac{6}{11}\\ &= 2+\frac{1}{\frac{11}{6}}\\ &= 2+\frac{1}{1+\frac{5}{6}}\\ &= 2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{6}{5}}}\\ &= 2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}\end{aligned}$$

إذن، $a+b+c=1+1+5=7$.

(١٧) الإجابة هي (د):

$$3000\times 3000^{3000} = 3000^{3000+1} = 3000^{3001} .$$

(١٨) الإجابة هي (ج):

$$27^2\times 3^4 = \left(3^3\right)^2\times 3^4 = 3^6\times 3^4 = 3^{10} .$$

(١٩) الإجابة هي (أ):

$$\begin{aligned}a &= 3^{200} = \left(3^8\right)^{25} = \left(6561\right)^{25}\\ b &= 4^{125} = \left(4^5\right)^{25} = \left(1024\right)^{25}\\ c &= 5^{100} = \left(5^4\right)^{25} = \left(625\right)^{25}\end{aligned}$$

$$d = 2^{300} = \left(2^{12}\right)^{25} = \left(4096\right)^{25}$$

إذن، $c < b < d < a$.

(٢٠) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$p = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3} = \frac{10}{30}$$
$$q = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3} = \frac{100}{30}$$
$$r = \frac{0.3}{1} = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}$$

إذن، $q > p$ و $p > r$.

(٢١) الإجابة هي (ج):

$$\begin{aligned} 10 \times 14 \times 35 &= 2 \times 5 \times 2 \times 7 \times 5 \times 7 \\ &= 2^2 \times 5^2 \times 7^2 = (2 \times 5 \times 7)^2 = (70)^2 \end{aligned}$$

إذن، الجذر التربيعي هو 70 .

(٢٢) الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13 .$$

(٢٣) الإجابة هي (أ)

بملاحظة أن الضرب والقسمة على العدد نفسه يكافئ الضرب (أو القسمة) بالعدد 1 فمن الممكن إعادة ترتيب (الضرب إبدالي) أعداد البسط والمقام لنجد أن

$$\begin{aligned} \frac{3 \times 5}{9 \times 11} \times \times \frac{7 \times 9 \times 11}{3 \times 5 \times 7} &= \frac{3}{3} \times \frac{5}{5} \times \frac{7}{7} \times \frac{9}{9} \times \frac{11}{11} \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

وتكون الإجابة هي (أ).

(٢٤) الإجابة هي (ب): عوضاً عن الجمع مباشرة لاحظ أن

$$\begin{aligned}&90+91+92+93+94+95+96+97+98+99\\&=90\times10+1+2+3+4+5+6+7+8+9\\&=90\times10+(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5\\&=900+10+10+10+10+5\\&=945\end{aligned}$$

حل آخر: بفرض أن

$$\begin{aligned}S&=90+91+92+93+94+95+96+97+98+99\\S&=99+98+97+96+95+94+93+92+91+90\end{aligned}$$

وبالجمع نجد أن

$$2S=189+189+189+\cdots+189=189\times10=1890$$

إذن، $S=\dfrac{1890}{2}=945$.

(٢٥) الإجابة هي (د): هذه مسألة سهلة حيث بعض قوى العدد 10 في البسط يمكن اختصارها مع قوى العدد 10 في المقام لنحصل على

$$\frac{10^7}{5\times10^4}=\frac{10^3}{5}=\frac{1000}{5}=200.$$

(٢٦) الإجابة هي (أ): بالحساب المباشر نجد أن

$-3a=6$، $4a=-8$، $\dfrac{24}{a}=-12$، $a^2=4$، $3a=-6$. وبهذا يكون $-3a$ هو أكبر هذه الأعداد.

(٢٧) الإجابة هي (أ): مقلوب العدد الأصغر من بين الأعداد الموجبة هو العدد الأكبر، ولذا فالعدد الذي له أكبر مقلوب من بين الأعداد المعطاة هو العدد $\dfrac{1}{3}$.

(٢٨) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$(1.8)(40.3+0.07)=1.8\times 40.37\approx 1.8\times 40=72$$

فالعدد أقرب إلى 72. أي أن الإجابة هي 74.

(٢٩) الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=2\times 3=6.$$

(٣٠) الإجابة هي (ب): لاحظ أن $3>\sqrt{8}>2$ وأن $9>\sqrt{80}>8$. ولذا فالأعداد الصحيحة الموجبة بين $\sqrt{8}$ و $\sqrt{80}$ هي: 3، 4، 5، 6، 7، 8 وعددها يساوي 6.

(٣١) الإجابة هي (د): لاحظ أنه عند ضرب عددين كل منهما مكون من مرتبتين فإن المرتبتين اللتين لهما تأثير على مرتبة آحاد حاصل الضرب هما مرتبتي الآحاد للعددين. إذن، إما أن $B=3$ أو أن $B=8$. ولكن، إذا كانت $B=3$ فنجد أن

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 73 \\ \hline 2336 \end{array}$$

ومن ذلك نخلص إلى أن $B=8$.

(٣٢) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$$(3*5)*8=\left(\frac{3+5}{2}\right)*8=4*8=\frac{4+8}{2}=6.$$

(٣٣) الإجابة هي (ب): نحصل على أعلى قيمة للمقدار $\frac{b}{a}$ عندما يكون b هو

العدد الأكبر و a هو العدد الأصغر. إذن، $b = 1200$ و $a = 200$.

ويكون $6 = \frac{1200}{200} = \frac{b}{a}$.

(٣٤) الإجابة هي (د): بالجمع المباشر نجد أن المجموع يساوي 0.426. أو

$$\begin{aligned}0.4 + 0.02 + 0.006 &= \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} \\ &= \frac{400 + 20 + 6}{1000} = \frac{426}{1000} = 0.426\end{aligned}$$

(٣٥) الإجابة هي (ب): لاحظ أن

$$\frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0.08.$$

(٣٦) الإجابة هي (د): لاحظ أن المقدار يساوي

$$\begin{aligned}&2\left[(81 + 99) + (83 + 97) + (85 + 95) + (87 + 93) + (89 + 91)\right] \\ &= 2(180 + 180 + 180 + 180 + 180) \\ &= 10 \times 180 = 1800\end{aligned}$$

(٣٧) الإجابة هي (ج): المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 2، 3، 4، 5، 6، 7 هو $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$.

(٣٨) الإجابة هي (ب): لاحظ أولاً أن $\frac{1}{4} > \frac{1}{7}$ و $\frac{1}{4} > \frac{1}{19}$. إذن،

$$2\frac{1}{7} + 3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{19} < 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 11$$

ومن الواضح أن

$$2\frac{1}{7} + 3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{19} > 2 + 3\frac{1}{2} + 5 = 10\frac{1}{2}$$

إذن، المجموع يقع بين $10\frac{1}{2}$ و 11.

(٣٩) الإجابة هي (د): لاحظ أن الكسور الأربعة الأولى أصغر بقليل من $\frac{1}{2}$ ولكن الكسر الأخير (هـ) أكبر بقليل من $\frac{1}{2}$.

(٤٠) الإجابة هي (ج): بالحساب المباشر نرى أن

$$3^* + 6^* = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \neq 9^*$$
$$6^* - 4^* = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12} \neq 2^*$$
$$2^* \times 6^* = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = 12^*$$
$$10^* \div 2^* = \frac{1}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{5} = 5^*$$

إذن، العبارتان (٣) و (٤) صائبتان.

(٤١) الإجابة هي (ب): عدد المربعات السوداء يزيد 1 في كل صف عن الصف الأعلى منه، ولذا فعددها يساوي $1 + 2 + 3 + \cdots + 8$.

وعدد المربعات البيضاء يزيد 1 في كل صف عن الصف الأعلى منه ابتداءاً من الصف الثاني، ولذا فعددها يساوي

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 7 .$$

وبهذا تكون الزيادة هي

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 8) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 7) = 8 .$$

(٤٢) الإجابة هي (ب): عدد الفواصل العشرية التي نحتاج تحريكها إلى اليسار هو $3 + 2 = 5$. إذن، الإجابة الصحيحة هي 0.192.

(٤٣) الإجابة هي (د): لاحظ أن $169 > 164 > 144$. ولذا فإن $\sqrt{169} > \sqrt{164} > \sqrt{144}$. أي أن $13 > \sqrt{164} > 12$.

(٤٤) الإجابة هي (د): بتحليل 36 إلى حاصل ضرب عددين نجد أن القيم الممكنة هي $6\times 6 = 9\times 4 = 12\times 3 = 18\times 2 = 36\times 1 = 36$.

وبهذا فالمجاميع الممكنة هي:

$$1+36\ ,\ 2+18\ ,\ 3+12\ ,\ 4+9\ ,\ 6+6$$

وأكبر هذه المجاميع هو $1+36 = 37$.

(٤٥) الإجابة هي (د): يمكن كتابة المقدار على النحو

$$\begin{aligned}&(1+49)+(11+39)+(21+29)+(31+19)+(41+9)\\&=50+50+50+50+50=250\end{aligned}$$

(٤٦) الإجابة هي (أ): لدينا

$$0.99 > 0.9099 > 0.909 > 0.9009 > 0.9$$.

(٤٧) الإجابة هي (د):

$$-15+9\times(6\div 3) = -15+9\times 2 = -15+18 = 3$$.

(٤٨) الإجابة هي (ج): استخدمنا 5 خطوات متساوية للانتقال من العدد 0 إلى العدد 20. إذن، قيمة كل من هذه المسافات هي $\frac{20}{5} = 4$. وبهذا يكون $y = 3\times 4 = 12$.

(٤٩) الإجابة هي (د):

$$\begin{aligned}(2\times 3\times 4)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) &= (2\times 3\times 4)\times\frac{12+8+6}{2\times 3\times 4}\\&=12+8+6=26\end{aligned}$$

أو

$$(2\times 3\times 4)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = 3\times 4+2\times 4+2\times 3 = 26$$.

(٥٠) الإجابة هي (د):

$$\frac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{3}.$$

(٥١) الإجابة هي (ج): لنفرض أن العددين هما abc و def. عندئذ

$$abc + def = 100(a+d) + 10(b+e) + (c+f).$$

ولكي يكون هذا المجموع أصغر ما يمكن فيجب أن يكون $a = 4$، $d = 5$، $b = 6$، $e = 7$، $c = 8$ و $f = 9$. إذن

$$abc + def = 100(9) + 10(13) + 17 = 1047.$$

(٥٢) الإجابة هي (د): عند تربيع عدد صحيح فإن المرتبة التي تؤثر على مرتبة آحاد المربع هي مرتبة آحاد العدد. وبتربيع الأعداد من 1 إلى 9 نجد أن $1^2 = 1$، $2^2 = 4$، $3^2 = 9$، $4^2 = 16$، $5^2 = 25$، $6^2 = 36$، $7^2 = 49$، $8^2 = 64$، $9^2 = 81$. وبهذا فالإجابة هي (د).

(٥٣) الإجابة هي (د): لاحظ أن الخيارات (أ) ، (ب) ، (د) لا تحدث تغييراً كبيراً للعدد 13579. أما (ج) فهو أصغر بكثير من العدد 13579 والعدد (د) أكبر بكثير من العدد 13579.

(٥٤) الإجابة هي (ج) : لكي نحصل على أكبر حاصل ضرب نحتاج لضرب ثلاثة أعداد موجبة أو عدد موجب وعددين سالبين. وبما أنه لا يوجد ثلاثة أعداد موجبة فنحتاج إلى عدد موجب وعددين سالبين. ولذا نختار ثلاثة أعداد القيمة المطلقة لهما كبيرة وهي -2، -3، 5. ويكون حاصل الضرب هو

$$(5)(-3)(-2) = 30$$

(٥٥) الإجابة هي (ب): بإكمال كتابة الأعداد المكونة للمتتالية نجد أن المتتالية

هي:

$$1024 ، 64 ، 16 ، 4 ، 4 ، 1 ، 4 ، \frac{1}{4}$$

ويكون أول هذه الأعداد هو $\frac{1}{4}$.

(٥٦) الإجابة هي (د):

$$\begin{aligned}
&991 + 993 + 995 + 997 + 999 \\
&= (1000 - 9) + (1000 - 7) + (1000 - 5) + (1000 - 3) + (1000 - 1) \\
&= 5000 - (9 + 7 + 5 + 3 + 1) \\
&= 5000 - 25
\end{aligned}$$

إذن،

$$\begin{aligned}
5000 - 25 &= 5000 - N \\
N &= 25
\end{aligned}$$

(٥٧) الإجابة هي (د): لنفرض أن العددين هما a و b. لكي يكون خارج القسمة أكبر ما يمكن فإما أن يكون العددان $a,b > 0$ أو $a,b < 0$. بتجريب عناصر المجموعة نجد أن $a = -24$ و $b = -2$ وخارج القسمة هو

$$.\frac{a}{b} = \frac{-24}{-2} = 12$$

(٥٨) الإجابة هي (ب): لاحظ أولاً أن عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن العدد الصحيح الموجب n وتقبل القسمة على العدد الصحيح الموجب k يساوي $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ حيث $\lfloor x \rfloor$ يعني أكبر عدد صحيح لا يزيد عن x.

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 3 يساوي $15 = \left\lfloor \frac{46}{3} \right\rfloor$ وعدد الأعداد

التي تقبل القسمة على 5يساوي $9 = \left\lfloor \frac{46}{5} \right\rfloor$. إذن، عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 3 أو 5 يساوي $24 = 9 + 15$. ولكننا نكون قد حسبنا مضاعفات $LCM(3,5) = 15$ مرتين. لهذا نجد أن عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 15 هو $3 = \left\lfloor \frac{46}{15} \right\rfloor$. إذن، العدد المطلوب هو$21 = 3 - 24$.

لاحظ أن العدد 46صغير نسبياً ولذا يمكن التحقق من الإجابة بإيجاد هذه القواسم وهي:

$$1, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21,$$
$$24, 25, 27, 30, 33, 35, 36, 39, 42, 45$$

وعددها يساوي 21.

(٥٩) الإجابة هي (ج): لاحظ أن العدد يساوي

$$\left(5^2\right)^7 \times \left(2^3\right)^3 = 5^{14} \times 2^9 = 5^5 \times 10^9$$

ولذا فعدد الأصفار يساوي 9 لأن 5^5 لا يحتوي على أصفار في بدايته.

(٦٠) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$$ABC = 100A + 10B + C$$
$$AB = 10A + B$$
$$A = A$$

إذن،

$$ABC + AB + A = 111A + 11B + C$$

$$111A + 11B + C = 300$$

من الواضح أن $A < 3$. وبما أن $B,C \leq 9$ فإن
$11B + C \leq 99 + 9 = 108$. وبهذا فإن $111A > 192$. أي أن
$A \geq 2$.

إذن، $A = 2$ ويكون $11B + C = 78$. ومن ذلك يكون من الواضح أن
$B = 7$ و $C = 1$.

(٦١) الإجابة هي (د): كل من الأعداد (أ) ، (ب) ، (ج) يساوي
$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1.25$. ولكن العدد $\frac{5}{4} \neq 1.2 = 1\frac{1}{5}$.

(٦٢) الإجابة هي (د): لكي يكون $a - b$ أكبر ما يمكن يجب أن يكون a أكبر ما يمكن و b أصغر ما يمكن. إذن، $a = 12$ و $b = -16$. ويكون
$a - b = 12 - (-16) = 28$.

(٦٣) الإجابة هي (د): المجموع يساوي

$$(1 + 3 - 4) + (2 + 5 - 6) = 0 + 1 = 1 .$$

(٦٤) الإجابة هي (ب):

$$39 = 3 \times 13$$
$$51 = 3 \times 17$$
$$77 = 7 \times 11$$
$$91 = 7 \times 13$$

إذن، 17 هو أكبر الأعداد الأولية وهو قاسم للعدد 51.

(٦٥) الإجابة هي (د):

$$(2 * 4) * (1 * 3) = 3 * 3 = 4 .$$

(٦٦) الإجابة هي (د):

$$5 - 4 + 6 \times 3 = 1 + 18 = 19$$

(٦٧) الإجابة هي (ج): الطريقة الوحيدة لوضع الأعداد $1,2,3$ في المربعات بحيث تحقق المطلوب هي

1	3	2
3	2	1
2	1	3

ولذا فإن $A + B = 1 + 3 = 4$.

(٦٨) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$
$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$$
$$1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$
$$\frac{1}{\frac{10}{7}} = \frac{7}{10}$$

(٦٩) الإجابة هي (د): آحاد وعشرات العدد $10^{93} - 93$ هي 7 و 0 وباقي مراتبه (وعددها 91) هي 9. إذن، مجموع مراتبه يساوي

$$9 \times 91 + 0 + 7 = 826$$

(٧٠) الإجابة هي (د): المجموع يساوي

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 55}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

(٧١) الإجابة هي (أ): عند ضرب عددين صحيحين فمرتبة آحاد حاصل ضربهما تعتمد على مرتبة آحاد كل منهما. ولهذا يكفي أن نوجد حاصل ضرب الأعداد التالية لنجد مرتبة آحاد حاصل الضرب:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$$

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 20160$$

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 60480$$

من ذلك نجد أن مرتبة الآحاد يجب أن تساوي 0.

(٧٢) الإجابة هي (أ):

قواسم العدد 36 هي $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$. وقيم N التي تجعل $N + 2$ قاسماً للعدد 36 هي $N = 1, 2, 4, 7, 10, 16, 34$ وعددها يساوي 7

(٧٣) الإجابة هي (ج): لكي يكون $\frac{W}{X} + \frac{Y}{Z}$ أصغرما يمكن فيجب أن يكون العددان X و Z كبيرين و Y و W صغيرين. ولذا لدينا الخياران التاليان:

$$\frac{W}{X} + \frac{Y}{Z} = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} = \frac{26}{72} = \frac{13}{36}$$

و

$$\frac{W}{X} + \frac{Y}{Z} = \frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72}$$

وهذا أصغر من المجموع السابق. إذن، الخيار الصحيح هو (ج).

(٧٤) الإجابة هي (د): لكي نحصل على مجموع أكبر ما يمكن فيجب أن يكون $X = 9$ و $Y = 8$ أو $X = 8$ و $Y = 9$. إذا كان $X = 9$ و

$Y = 8$ فنحصل على المجموع 1097 وهو عدد مكون من أربع مراتب.

إذن، $X = 8$ و $Y = 9$. ويكون المجموع هو 994 وهو على الشكل YYZ.

(٧٥) الإجابة هي (د): مجموع ما مع أحمد هو $1 + 5 + 10 + 20 = 36$ ريال.

إذن، النسبة المئوية المطلوبه هي $\frac{36}{50} \times 100 = 72\%$.

(٧٦) الإجابة هي (د): نفرض أن العدد هو x. إذن،

$$\frac{3}{4} \times x \div \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times x \times \frac{5}{3} = \frac{5}{4} \times x.$$

(٧٧) الإجابة هي (ب): التمثيل العشري للعدد $\frac{4}{37}$ هو

$$\frac{4}{37} = 0.108108108\cdots$$

إذن، العدد دوري ودورته تساوي 3. إذن، المرتبة مائة بعد الفاصلة العشرية يجب أن تكون بداية الدورة (أي 1).

(٧٨) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$$6545 = 5 \times 7 \times 11 \times 17 = (5 \times 17) \times (7 \times 11) = 85 \times 77$$

إذن، مجموع العددان هو $85 + 77 = 162$.

(٧٩) الإجابة هي (ب): قواسم العدد 36 هي

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

مضاعفات الأربعة من بينها هي $4, 12, 36$ وعددها 3.

(٨٠) الإجابة هي (ج): بما أننا نسعى إلى نتيجة أصغر ما يمكن وأن أعداد المجموعة هي أعداد صحيحة أكبر من 1 فنختار أصغر ثلاثة أعداد في المجموعة وهي

3، 5، 7 (لأن اختيار أعداد كبيرة يؤدي إلى مجموع وحاصل ضرب أكبر). الخيارات الممكنة للعمليتين هي:

$$(3+5)\times 7 = 8\times 7 = 56$$
$$(3+7)\times 5 = 10\times 5 = 50$$
$$(7+5)\times 3 = 12\times 3 = 36$$

وأصغر هذه الأعداد هو 36 . إذن،الإجابة هي (ج).

(٨١) الإجابة هي (ب): بما أن $AB = 10$ و $BC = 4$ فنجد من متباينة المثلث أن

$$10-4 \le AC \le 10+4$$
$$6 \le AC \le 14$$

إذن، القيمة الصغرى للقطعة AC هي $AC = 6$ وبتطبيق متباينة المثلث على $\triangle ACD$ نجد أن $6-3 \le AD \le 6+3$.

وتكون القيمة الصغرى المطلوبة للمسافة بين A و D هي $AD = 3$.

(٨٢) الإجابة هي (ب): يمكن حل هذه المسألة بملاحظة أن العمود يجب أن يحتوي على الأعداد 6، 8، 9 وأن الصف يجب أن يحتوي على الأعداد 1، 2، 3، 6 على النحو التالي

9			
6	3	2	1
8			

إذن مجموع الأعداد هو $29 = 9 + 8 + 6 + 3 + 2 + 1$.

(٨٣) الإجابة هي (د): لكي نختبر قسمة عدد على العدد 5 ننظر إلى مرتبة آحاد العدد، فإذا كانت هذه المرتبة 0 أو 5 فالباقي هو 0، وإذا كانت المرتبة 1 أو 6 فالباقي هو 1 وهكذا. ويتم معرفة مرتبة آحاد العدد

$$1492 \times 1776 \times 1812 \times 1996$$

بضرب مراتب الآحاد لكل من الأعداد في حاصل ضرب. أي

$$2 \times 6 \times 2 \times 6 = 144$$

ولذا فمرتبة آحاد العدد المطلوب هو مرتبة آحاد العدد 144 وهي 4. إذن باقي قسمة العدد على العدد 5 هو 4 وتكون الإجابة هي (د).

(٨٤) الإجابة هي (أ):

بعد المرة الأولى سيظهر العدد $-\frac{1}{4} = \frac{1}{1-5}$

بعد المرة الثانية سيظهر العدد $\frac{4}{5} = \frac{1}{1-\frac{-1}{4}}$

بعد المرة الثالثة سيظهر العدد $5 = \frac{1}{1-\frac{4}{5}}$

إذن، نحصل على العدد 5 بعد ثلاث ضغطات متتالية ومن ثم بعد $33 \times 3 = 99$ ضغطة سيظهر العدد 5 وبعد الضغطة المائة سيظهر العدد $-\frac{1}{4}$.

(٨٥) الإجابة هي (ج): لاحظ أولاً أن عدد مراتب هذه الأعداد يجب أن لا يزيد عن 4 لأن أصغر عدد مكون من 5 مراتب يحقق $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ وهذا يناقض الشرط الأول.

لا يمكن أن تكون أحد المراتب أكبر من 7 لأن $64 = 8^2$. لنفرض أن $wxyz$ عدد مكون من أربع مراتب يحقق الشرطين. عندئذ،

$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 50$ حيث $0 < w < x < y < z < 8$.

$z = 7$ مستحيل لأن المراتب الثلاثة يجب أن تحقق على الأقل $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ مما يؤدي إلى

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 7^2 = 63 > 50$$

$z = 6$ يؤدي إلى أن يكون $w^2 + x^2 + y^2 = 14$ وهذا يتحقق عندما يكون $w = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 3$ ونحصل على العدد 1236.

$z = 5$ يؤدي إلى $w^2 + x^2 + y^2 = 25$، إذا كان $y = 4$ فإن $x = 3$ و $w = 0$.

$z = 4$ يؤدي إلى العدد 1234.

إذن، العدد الأكبر هو 1236 وحاصل ضرب مراتبه هو

$$1 \times 2 \times 3 \times 6 = 36$$

(٨٦) الإجابة هي (د): لاحظ أن مرتبة آحاد حاصل الضرب تتحدد من مراتب آحاد الأعداد المضروبة. ولذا نحتاج لمعرفة مرتبة آحاد حاصل الضرب

$$(2 \times 4 \times 6 \times 8) \times (2 \times 4 \times 6 \times 8) \times \quad \text{(عشر مرات)}$$
$$(2 \times 4 \times 6 \times 8) \times \cdots \times (2 \times 4 \times 6 \times 8)$$

إذن، العدد هو

$$\left(2 \times 4 \times 6 \times 8\right)^{10} = \left(384\right)^{10}$$

ومرة أخرى نحتاج فقط لمعرفة آحاد 4^{10}. الآن

$$4^1 = 4$$
$$4^2 = 16$$
$$4^4 = 256$$
$$4^8 = 65536$$

إذن، $4^{10} = 4^8 \times 4^2 = 65536 \times 16$

وتكون مرتبة آحاده هي مرتبة آحاد $6 \times 6 = 36$ وهي المرتبة 6.

(٨٧) الإجابة هي (ب): بالحساب المباشر نجد أن

$\frac{6}{7} = \frac{6}{x}$ ، $\frac{6}{x+1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ، $\frac{6}{x-1} = \frac{6}{6} = 1$ ، $\frac{7}{6} = \frac{x}{6}$.

كل من القيمتين الأخيرتين أكبر من 1. ولذا فإحدى القيمتين $\frac{6}{7}$ أو $\frac{3}{4}$ هي الصغرى. ولكن $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ و $\frac{24}{28} = \frac{6}{7}$. إذن، الإجابة هي (ب).

(٨٨) الإجابة هي (د): بالحساب المباشر نجد أن

$$\frac{3 \mid 4}{1 \mid 2} = 3 \times 2 - 1 \times 4 = 6 - 4 = 2 .$$

(٨٩) الإجابة هي (ب): بكتابة أول 10 أعداد بعد الفاصلة نجد أن الأعداد هي

(أ) 9.1234400000 (ب) 9.1234444444

(ج) 9.1234343434 (د) 9.1234234234

إذن، (ب) هو الأكبر.

(٩٠) الإجابة هي (ج): هناء (كونها فتاة) لها عدد من الأخوات أقل بواحد من عدد أخوات هاني وعدد الأخوة أكثر بواحد من عدد أخوة هاني. إذن، $S = 3 - 1 = 2$ ، $B = 5 + 1 = 6$. ويكون

$$S \times B = 3 \times 2 = 6$$

(٩١) الإجابة هي (د): لاحظ أن المتتالية هي:

$$98, 49, 44, 22, 11, 6, 54, 27, 22, 11, 6, 54, 27, 22, \ldots$$

أي أنها دورية بعد الحد الثالث وطول دورها يساوي 5 إذن، يكون المطلوب هو إيجاد الحد الخامس والتسعون من المتتالية

$$22, 11, 6, 54, 27, 22, 11, 6, 54, 27, 22, \ldots$$

وبما أن العدد 95 يقبل القسمة على 5 فيكون العدد المطلوب هو الحد الخامس (طول الدورة). أي هو العدد 27.

(٩٢) الإجابة هي (أ): بالتبسيط نرى أن

$$(6?3) + 4 - 1 = 5$$
$$(6?3) + 3 = 5$$
$$(6?3) = 2$$

إذن، ? هي $\div$.

(٩٣) الإجابة هي (د): لنفرض أن f يرمز لسمكة واحدة وأن l يرمز لكيلوغرام واحد من اللحم وأن r يرمز لكيس واحد من الأرز. عندئذ،

$$3f = 2l$$
$$l = 4r$$

وبتعويض المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نجد أن $3f = 8r$.

إذن، $f = \frac{8}{3}r = 2\frac{2}{3}r$. وبهذا فالإجابة هي (د).

(٩٤) الإجابة هي (ج): أحد الحلول لهذه المسألة هو كتابة الأعداد بين 10 و 50 واختبار فيما إذا كان العدد يقبل القسمة على مرتبة آحاده. وبهذا نرى أن الأعداد التي تقبل القسمة على مرتبة آحادها هي : 11، 12، 15، 21، 22، 24، 25، 31، 32، 33، 35، 36، 41، 42، 44، 45، 48 . وعددها 17.

(٩٥) الإجابة هي (د): بالتجريب نرى أن مرتبة آحاد القوى الزوجية للعدد 19 هي 1 ومرتبة آحاد القوى الفردية للعدد 19 هي 9. إذن، مرتبة آحاد 19^{19} هي 9. وبالمثل، مرتبة آحاد القوى الزوجية للعدد 99 هي 1 ومرتبة آحاد القوى الفردية للعدد 99 هي 9. إذن، مرتبة آحاد 99^{99} هي 9. وبهذا فمرتبة آحاد المجموع $19^{19}+99^{99}$ هي مرتبة آحاد $9+9=18$ وهي 8.

(٩٦) الإجابة هي (ب): العام البالندروم بعد العام 2002 هو 2112. ولذا فحاصل ضرب مراتبه هو $2\times1\times1\times2=4$.

(٩٧) الإجابة هي (ج): إذا كانت جميع الدراجات ذات عجلين فيكون عدد العجلات هو $7\times2=14$ عجلة.

الآن، كل دراجة ذات ثلاث عجلات تساهم بعجلة أخرى. إذن، عدد الدراجات ذات الثلاث عجلات يساوي $19-14=5$.

(٩٨) الإجابة هي (د): بما أن T يساوي 7 فإن $T+T=14=FO$. إذن، $O=4$ و $F=1$. للحصول على R نقوم بجمع $O+O=4+4=8$. إذن $R=8$. إذن، W يجب أن يكون عدداً أصغر من 5 (لأنه لو كان أكبر من 5 سيغير قيمة W). وبما أننا استخدمنا العددين 1 و 4 فإن $W=2$ أو $W=3$. إذا كان $W=2$ فإن $U=4$ وهذا غير ممكن. إذن $W=3$.

(٩٩) الإجابة هي (ج): لكي يقبل العدد القسمة على الأعداد 15 و 20 و 25 فإنه يجب أن يقبل القسمة على المضاعف المشترك الأصغر لها

$$LCM(15,20,25)=300$$

عدد الأعداد بين 1000 و 2000 والتي تقبل القسمة على 300 يساوي 3
وهذه الأعداد هي $1200, 1500, 1800$.

(١٠٠) الإجابة هي (ب): عدد الكيلومترات الذي يقابل 17سم هو

$$\frac{17 \times 72}{12} = 102$$ كم

(١.١٣) مسائل غير محلولة

(١) $4.8 + 2.6 + 1.2$ يساوي

(أ) 8.2 (ب) 8.3 (ج) 8.4 (د) 8.6

(٢) مجموع العددين الأصغر والأكبر من بين الأعداد 0.42، 0.402، 0.8، 0.788، 0.749 يساوي

(أ) 1.2 (ب) 1.202 (ج) 1.23 (د) 1.3

(٣) قيمة المجموع

$$1-2+3-4+5-6+\ldots-998+999-1000+1001$$

يساوي

(أ) -501 (ب) -500 (ج) 500 (د) 501

(٤) إذا كان $a=2^{100}$، $b=3^{75}$، $c=5^{50}$ فما الترتيب الصحيح لهذه الأعداد ؟

(أ) $a<c<b$ (ب) $a<b<c$

(ج) $b<a<c$ (د) $c<a<b$

(٥) $\left(3^2\right)^3 \div 3^{\left(2^3\right)}$ يساوي

(أ) 0 (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) 9 (د) 27

(٦) ما العدد الأكبر من بين الأعداد التالية ؟

(أ) 2×2^7 (ب) $2\times 2^6-2$ (ج) 2^7 (د) $\frac{2^7}{2}$

(٧) عدد مراتب (خانات) العدد $4^9 \times 5^{18}$ يساوي

(أ) 18 (ب) 19 (ج) 20 (د) 21

(٨) المقدار $\frac{500^2-400^2}{50^2-40^2}$ يساوي:

(أ) 10 (ب) 100 (ج) 1000 (د) 10000

(٩) المقدار $\frac{5}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}$ يساوي

(أ) $\frac{14}{27}$ (ب) $\frac{17}{27}$ (ج) $\frac{19}{27}$ (د) $\frac{20}{27}$

(١٠) المقدار $4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$ يساوي

(أ) $7\frac{1}{6}$ (ب) $8\frac{1}{6}$ (ج) $8\frac{1}{2}$ (د) $8\frac{5}{6}$

(١١) قيمة المقدار $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}$ تساوي

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) $\frac{6}{7}$ (ج) $\frac{7}{8}$ (د) $\frac{8}{9}$

(١٢) [AJHSME 1985] حاصل ضرب العوامل التسعة

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10}\right)$ يساوي

(أ) $\frac{1}{10}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{10}{11}$

(١٣) [AJHSME 1985] الكسر الذي يقابل نقطة منتصف المسافة بين $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{3}$

على خط الأعداد هو

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{2}{15}$ (ج) $\frac{4}{15}$ (د) $\frac{6}{15}$

(١٤) [AJHSME 1986] أصغر مجموع يمكن الحصول عليه بجمع ثلاثة أعداد

مختلفة من المجموعة $\{7, 25, -1, 12, -3\}$ هو

(أ) -3 (ب) -1 (ج) 3 (د) 5

(١٥) [AJHSME 1986] لنفرض أن O يرمز لعدد صحيح موجب فردي وأن n يرمز لعدد صحيح موجب. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية للعدد $O^2 + nO$ ؟

(أ) دائماً زوجي (ب) دائماً فردي

(ج) زوجي إذا كان n زوجياً (د) فردي إذا كان n زوجياً

(١٦) [AJHSME 1986] قيمة المقدار $\frac{(304)^5}{(29.7)(399)^4}$ أقرب إلى:

(أ) 0.003 (ب) 0.03 (ج) 0.3 (د) 3

(١٧) أصغر حاصل ضرب نحصل عليه بضرب عددين مختلفين من المجموعة $\{-7, -5, -1, 1, 3\}$ هو

(أ) -35 (ب) -21 (ج) -15 (د) 3

(١٨) [AJHSME 1987] إذا كانت A و B مرتبتين (خانتين) غير صفريتين فإن عدد المراتب (ليست بالضرورة مختلفة) لمجموع الثلاث أعداد الصحيحة

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 8 & 7 & 6 \\ + & & A & 3 & 2 \\ + & & & B & 1 \\ \hline \end{array}$$

هو

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 7

(١٩) [AJHSME 1987] المقدار $299 + 2(299) + 3(299) + 4(299)$ يساوي

(أ) 19.89 (ب) 2990 (ج) 9289 (د) 2998

(٢٠) [AJHSME 1988] قيمة حاصل الضرب $0.125 \times 2 \times 0.25 \times 8$ تساوي

(أ) $\frac{1}{8}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 2

(٢١) [AJHSME 1988] قيمة المقدار $\frac{3}{30} + \frac{2}{20} + \frac{1}{10}$ تساوي

(أ) 0.1 (ب) 0.2 (ج) 0.3 (د) 0.6

(٢٢) [AJHSME 1988] قيمة المقدار $\frac{(0.2)^3}{(0.02)^2}$ تساوي

(أ) 0.2 (ب) 2 (ج) 10 (د) 20

(٢٣) [AJHSME 1988] المقدار $(5.17 + 4.829) \times 8.163 \times 2.46$ أقرب إلى

(أ) 100 (ب) 200 (ج) 300 (د) 400

(٢٤) [AJHSME 1988] مقلوب العدد $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ هو

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{6}{5}$ (د) $\frac{5}{2}$

(٢٥) [AJHSME 1989] المقدار $\frac{6}{1000} + \frac{4}{100} + \frac{2}{10}$ يساوي

(أ) 0.012 (ب) 0.0246 (ج) 0.12 (د) 0.246

(٢٦) [AJHSME 1989] أي من الأعداد التالية أقرب إلى العدد $\frac{401}{0.205}$ ؟

(أ) 0.2 (ب) 2 (ج) 20 (د) 2000

(٢٧) [AJHSME 1989] المقدار $\frac{9}{5 \times 53}$ يساوي

(أ) $\frac{0.9}{0.7 \times 53}$ (ب) $\frac{0.9}{0.7 \times 0.53}$

(ج) $\frac{0.9}{0.7 \times 5.3}$ (د) $\frac{0.9}{7 \times 0.53}$

(٢٨) [AJHSME 1990] ما المرتبة من مراتب العدد 0.12345 التي يمكن استبدالها بالعدد 9 لنحصل على أكبر عدد ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٢٩) [AJHSME 1990] ما العدد من بين الأعداد التالية الأقرب إلى العدد $(0.48017)^3$ ؟

(أ) 0.011 (ب) 0.110 (ج) 1.10 (د) 11.0

(٣٠) [AJHSME 1990] العدد

$10 + 20 - \cdots + 1960 - 1970 + 1980 - 1990$ يساوي:

(أ) $990-$ (ب) $10-$ (ج) 990 (د) 1000

(٣١) [AJHSME 1991] العدد $1000\,000\,000\,000 - 777\,777\,777\,777$ يساوي

(أ) $222\,222\,222\,222$ (ب) $222\,222\,222\,223$

(ج) $233\,333\,333\,333$ (د) $322\,222\,222\,223$

(٣٢) [AJHSME 1991] العدد

$\frac{(487000)(12027300) + (9621001)(487000)}{(19367)(0.05)}$ أقرب إلى:

(أ) 10000000 (ب) $100\,000\,000$

(ج) $1000\,000\,000$ (د) $10\,000\,000\,000$

(٣٣) [AJHSME 1991] إذا كان $\frac{1990 + 1991 + 1992}{N} = \frac{2 + 3 + 4}{3}$ فإن

N يساوي:

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 1990 (د) 1991

(٣٤) [AJHSME 1992] المقدار

$$\frac{10-9+8-7+6-5+4-3+2-1}{1-2+3-4+5-6+7-8+9}$$ يساوي

(أ) -1 (ب) 1 (ج) 5 (د) 9

(٣٥) [AJHSME 1992] مجموع مراتب العدد 998 هو $26 = 8 + 9 + 9$. ما عدد الأعداد الصحيحة الزوجية المكونة من 3 مراتب ومجموع مراتبها يساوي 26 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٣٦) [AJHSME 1993] ما العددان اللذان حاصل ضربهما لا يساوي 36 ؟

(أ) $\{-4,-9\}$ (ب) $\{-3,-12\}$ (ج) $\left\{\frac{1}{2},-72\right\}$ (د) $\{1,36\}$

(٣٧) [AJHSME 1993] بعد تبسيط الكسر $\frac{49}{84}$ إلى أبسط صورة ممكنة ما مجموع البسط والمقام ؟

(أ) 11 (ب) 17 (ج) 19 (د) 33

(٣٨) [AJHSME 1993] حاصل الضرب $1000 \times 1993 \times 0.1993 \times 10$ يساوي

(أ) 1.993×10^3 (ب) 1993.1993 (ج) $(199.3)^2$ (د) $(1993)^2$

(٣٩) $3^3 + 3^3 + 3^3$ [AJHSME 1993] يساوي

(أ) 3^4 (ب) 9^3 (ج) 3^9 (د) 27^3

(٤٠) [AJHSME 1993] المقدار

$(1901+1902+1903+\cdots+1993)-(101+102+103+\cdots+193)$

يساوي

(أ) 167400 (ب) 172050 (ج) 181071 (د) 199300

(٤١) [AJHSME 1994] ما أكبر عدد من بين الأعداد التالية ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{3}{8}$ (د) $\frac{5}{12}$

(٤٢) [AJHSME 1994] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ثلاث مراتب ومجموع مراتبها 25 ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٤٣) [AJHSME 1994] ما العدد الذي يقع في المنتصف بين العددين $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4}$ ؟

(أ) $\frac{1}{10}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{5}{24}$

(٤٤) [AJHSME 1995] ما أصغر عدد صحيح أكبر من المجموع $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}+4\frac{1}{4}+5\frac{1}{5}$ ؟

(أ) 14 (ب) 15 (ج) 16 (د) 17

(٤٥) [AJHSME 1995] المقدار $\frac{2+4+6+\cdots+34}{3+6+9+\cdots+51}$ يساوي

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{17}{3}$

(٤٦) [AJHSME 1996] إذا كان حاصل ضرب 5 في عدد ما يساوي 2 فإن حاصل ضرب 100 في مقلوب هذا العدد يساوي

(أ) 2.5 (ب) 40 (ج) 50 (د) 250

(٤٧) [AJHSME 1996] المقدار

$$1-2-3+4+5-6-7+8+9-10-11+12+13-\cdots$$
$$\cdots+1992+1993-1994-1995+1996$$

يساوي

(أ) -998 (ب) -1 (ج) 0 (د) 1

(٤٨) [AJHSME 1997] المقدار $\frac{7}{10000}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{100}+\frac{1}{10}$ يساوي

(أ) 0.0026 (ب) 0.0197 (ج) 0.1997 (د) 0.26

(٤٩) [AJHSME 1997] اختارت سعاد عدداً صحيحاً مكوناً من مرتبتين ثم طرحته من العدد 200 ومن ثم ضاعفت النتيجة. ما أكبر عدد يكون باستطاعة سعاد الحصول عليه ؟

(أ) 200 (ب) 202 (ج) 220 (د) 380

(٥٠) [AJHSME 1997] ما هو أكبر عدد من بين الأعداد التالية ؟

(أ) 0.97 (ب) 0.979 (ج) 0.9709 (د) 0.907

(٥١) [AJHSME 1997] ما قيمة المجموع $a+b$ في حاصل الضرب

$$\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{a}{b}=9 \text{ ؟}$$

(أ) 11 (ب) 13 (ج) 17 (د) 35

(٥٢) [AJHSME 1998] المقدار $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{7}{8}}{\frac{4}{5}}$ يساوي

(أ) 1 (ب) $\frac{25}{16}$ (ج) 2 (د) $\frac{43}{20}$

(٥٣) [AJHSME 1998] قيمة حاصل الضرب $100\times19.98\times1.998\times1000$

تساوي

(أ) $(1.998)^2$ (ب) $(19.98)^2$ (ج) $(199.8)^2$ (د) $(1998)^2$

(٥٤) [AJHSME 1998] كل من الحروف W, Z, Y, X يقابل عدداً مختلفاً من أعداد المجموعة $\{1,2,3,4\}$. إذا كان $\frac{W}{X}-\frac{Y}{Z}=1$ فإن $W+Y$ يساوي

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 7

(٥٥) [AJHSME 1998] ما قيمة المقدار

$$2\left(1-\frac{1}{2}\right)+3\left(1-\frac{1}{3}\right)+4\left(1-\frac{1}{4}\right)+\cdots+10\left(1-\frac{1}{10}\right) \text{ ؟}$$

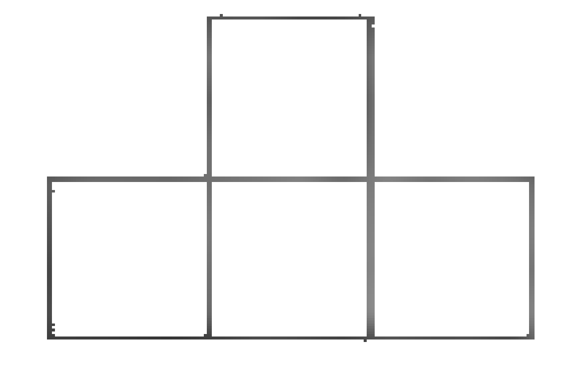
(أ) 45 (ب) 49 (ج) 50 (د) 55

(٥٦) [AMC8 1999] ما الثلاثية من بين ثلاثيات الأعداد التالية التي مجموع أعدادها لا يساوي 1 ؟

(أ) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$ (ب) $(2,-2,1)$

(ج) $(0.1,0.3,0.6)$ (د) $(1.1,-2.1,1.0)$

(٥٧) [AMC8 1999]وزعنا كلاً من الأعداد الخمسة $1,4,7,10,13$ على أحد مربعات الشكل المرفق بحيث يكون مجموع أعداد الصف يساوي مجموع أعداد العمود. ما أكبر مجموع للصف (أو العمود) الذي يمكن الحصول عليه ؟



(أ) 20 (ب) 21 (ج) 22 (د) 24

(٥٨) [AMC81999] باقي قسمة 1999^{2000} على العدد 5 يساوي:

(أ) 4 (ب) 3 (ج) 2 (د) 1

(٥٩) [AMC82000] عمر أحمد 42 عاماً. كمال أصغر من بندر بخمس سنوات. عمر بندر نصف عمر أحمد. ما عمر كمال ؟

(أ) 15 (ب) 16 (ج) 17 (د) 21

(٦٠) [AMC82000] أي من الأعداد التالية أصغر من مقلوبه ؟

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 0 (د) 1

(٦١) [AMC82000] ما عدد الأعداد الصحيحة الواقعة بين العددين $\frac{5}{3}$ و 2π ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٦٢) [AMC82000] ما أصغر حاصل ضرب ممكن لثلاثة أعداد مختلفة من بين أعداد المجموعة $\{-8,-6,-4,0,3,5,7\}$ ؟

(أ) -336 (ب) -280 (ج) -210 (د) -192

(٦٣) [AMC82000]لتكن العملية $\otimes$ معرفة على الأعداد غير الصفرية على النحو التالي: $a \otimes b = \frac{a^2}{b}$. ما هي قيمة

$$[(1 \otimes 2) \otimes 3] - [1 \otimes (2 \otimes 3)]$$ ؟

(أ) $-\frac{2}{3}$ (ب) $-\frac{1}{4}$ (ج) 0 (د) $\frac{1}{4}$

(٦٤) [AMC82001] أراد أحمد تزيين كرة قدم برسم 300 دائرة صغيرة عليها.

إذا كان باستطاعته رسم دائرة صغيرة خلال ثانيتين فبكم دقيقة يستطيع إنجاز عمله ؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 8 (د) 10

(٦٥) [AMC82001] مع سعاد 63 ريالاً ومع إيمان ريالان أكثر مما مع أروى وما مع أروى يساوي ثلث مامع سعاد. كم ريالاً مع إيمان ؟

(أ) 17 (ب) 18 (ج) 19 (د) 23

(٦٦) [AMC82001] استخدمنا كلاً من المراتب 1,2,3,4,9 مرة واحدة فقط لتكون مراتب أصغر عدد زوجي يمكن الحصول عليه (عدد مراتبه 5). ما مرتبة عشرات هذا العدد ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 9

(٦٧) [AMC82001] إذا كان $a \otimes b = \dfrac{a+b}{a-b}$ فإن $(6 \otimes 4) \otimes 3$ يساوي:

(أ) 4 (ب) 13 (ج) 15 (د) 30

(٦٨) [AMC82002] ولد حسام يوم السبت. في أي يوم من أيام الأسبوع يكون عمر حسام 706 يوم ؟

(أ) الأثنين (ب) الأربعاء (ج) الجمعة (د) السبت

(٦٩) [AMC82003] ما العدد من بين الأعداد التالية الذي له أصغر قاسم أولي ؟

(أ) 55 (ب) 57 (ج) 58 (د) 59

(٧٠) [AMC82003] وزن ساندويش هامبرجر يساوي 120جرام. وزن كمية اللحم التي تحتويها الساندويش هو 90 جرام. ما النسبة المئوية لكمية اللحم

الموجودة في الساندويش ؟

(أ) 60%　　(ب) 75%　　(ج) 80%　　(د) 85%

(٧١) [AMC82003] إذا كان 20% من عدد يساوي 12 فما هو 30% من العدد نفسه ؟

(أ) 15　　(ب) 18　　(ج) 20　　(د) 24

(٧٢) [AMC82004] اجتمع 12 من الأصدقاء في مطعم لتناول وجبة سمك. طلب كل منهم وجبة كاملة وبعد أن قدم لهم الطعام وجدوا أن كمية الوجبات جميعاً تكفي لعدد 18 من الأشخاص. لو اشترك الأصدقاء جميعاً في تناول الطعام فكم عدد الوجبات التي كانت ستكفيهم ؟

(أ) 8　　(ب) 9　　(ج) 10　　(د) 15

(٧٣) [AMC82004] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من مرتبتين ومجموع المرتبتين يساوي 7 ؟

(أ) 6　　(ب) 7　　(ج) 8　　(د) 9

(٧٤) [AMC82004] عدد صحيح أكبر من 2. عند قسمته على كل من الأعداد 3، 4، 5، 6 يكون باقي القسمة في كل مرة يساوي 2. أصغر عدد صحيح يحقق ذلك يقع بين العددين:

(أ) 40 و 49　　(ب) 60 و 79　　(ج) 100 و 129　　(د) 210 و 249

(٧٥) [AMC82005] ضرب سمير عدداً صحيحاً بالعدد 2 وحصل على الإجابة الخاطئة 60 لأنه كان من المفروض أن يقسم العدد على 2 ليحصل على إجابة صحيحة. ما الإجابة الصحيحة ؟

(أ) 7.5　　(ب) 15　　(ج) 30　　(د) 120

(٧٦) [AMC82005] تباع المشروبات الغازية بصناديق يحتوي الصندوق الواحد على 6 أو 12 أو 24 علبة. ما أصغر عدد من الصناديق اللازمة إذا أردنا شراء 90 علبة مشروب غازية بالضبط ؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8

(٧٧) [AMC82006] اشترت السيدة أم سالم سكراً بمبلغ 19.8ريال وسمكاً بمبلغ 50.4ريال ولحماً بمبلغ 99.89ريال. ما مجموع مشترياتها إلى أقرب ريال ؟

(أ) 120 (ب) 130 (ج) 150 (د) 170

(٧٨) [AMC82006] تحتوي مسابقة $AMC8$ على 25 سؤالاً درجاتها موزعة على النحو التالي: 4 درجات لكل إجابة صائبة، درجة واحدة لكل سؤال يترك بدون إجابة وتخصم درجتان لكل سؤال تكون إجابته خاطئة. تقدم أحمد إلى مسابقة $AMC8$ وتمكن من إجابة 13 سؤالاً إجابة صحيحة وأجاب على 7 أسئلة إجابة خاطئة وترك 5 أسئلة دون إجابة. ما العلامة التي سيحصل عليها ؟

(أ) 40 (ب) 43 (ج) 45 (د) 47

(٧٩) [AMC82006] عندما بدأ عبد العزيز السباحة في حوض سباحة منزله كان بإمكانه قطع المسافة من أول المسبح إلى آخره 10 مرات كل 25 دقيقة. وبعد أسبوع من التمرين أصبح بإمكانه قطع المسافة 12 مرة كل 24 دقيقة. كم دقيقة تحسنت سباحة عبد العزيز لقطع المسافة من أول المسبح إلى آخره مرة واحدة ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) 1 (د) 2

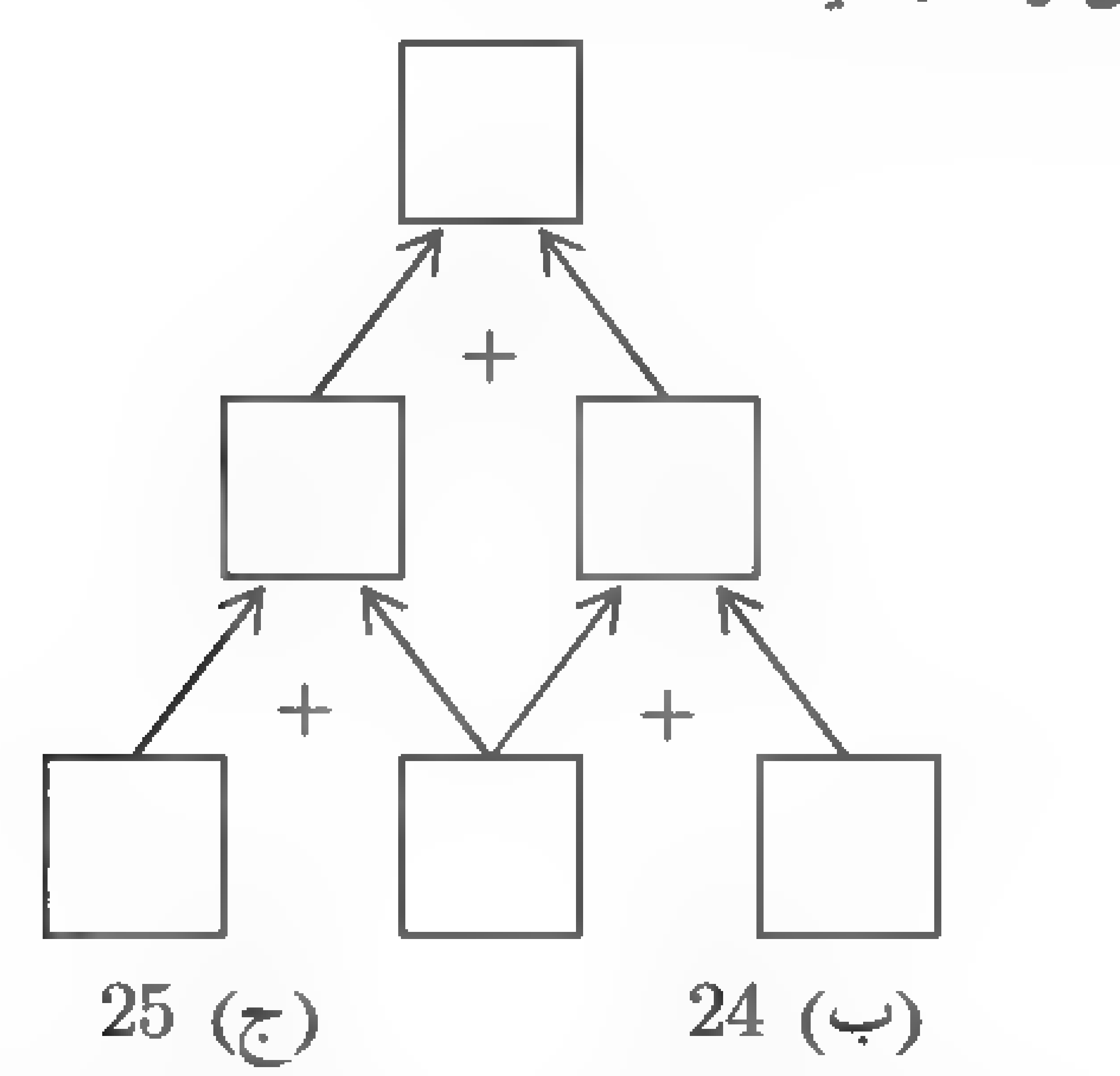
(٨٠) [AMC82006] حاصل الضرب $\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2006}{2005}$ يساوي:

(أ) 1 (ب) 1002 (ج) 1003 (د) 2005

(٨١) [AMC82006] ما عدد الأعداد الصحيحة المكونة من مرتبتين ومجموع مرتبتيها مربع كامل ؟

(أ) 13 (ب) 16 (ج) 17 (د) 18

(٨٢) [AMC82006] وضعنا ثلاث أعداد صحيحة موجبة مختلفة كل منها مكون من مرتبة واحدة في الثلاث مربعات في الصف الأسفل من الشكل المرفق. بعد ذلك قمنا بجمع العددين في كل خليتين متجاورتين ووضعنا الإجابات في خليتي الصف الأوسط ثم جمعنا عددي الصف الأوسط ووضعنا الناتج في خلية الصف الأعلى. ما الفرق بين أكبر قيمة ممكنة وأصغر قيمة ممكنة للأعداد الممكن وضعها في الخلية العليا ؟



(أ) 16 (ب) 24 (ج) 25 (د) 26

(٨٣) [AMC82007] وعدت الأم إبنتها سعاد بأنها ستشتري لها الجوال الذي لها رغبة في إقتنائه إذا ساعدتها في أعمال المنزل بمعدل 10 ساعات في الأسبوع

لمدة 6 أسابيع. في الأسابيع الخمسة الأولى اشتغلت سعاد 8، 11، 7، 12، 10 ساعات على التوالي. ما عدد الساعات التي يجب أن تشتغلها في الأسبوع السادس لكي تحصل على الجوال ؟

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12

(٨٤) [AMC82007] ما مجموع أصغر قاسمين أوليين للعدد 250 ؟

(أ) 2 (ب) 5 (ج) 7 (د) 10

(٨٥) [AMC82007] كان معدل تكلفة الاتصال الهاتفي من الرياض إلى الخرطوم في العام 1985 هو 2 ريال لكل دقيقة وأصبح المعدل في العام 2005 يساوي 65 هللة في الدقيقة. ما النسبة المئوية لانخفاض تكلفة الاتصال الهاتفي من الرياض إلى الخرطوم بين العامين 1985 و 2005 ؟

(أ) 30% (ب) 50.5% (ج) 60% (د) 67.5%

(٨٦) [AMC82007] المطلوب تكملة وضع الأعداد 1، 2، 3، 4 في المربعات الصغيرة بحيث يظهر كل منها مرة واحدة في كل صف وكل عمود. ما العدد الذي يجب وضعه في مربع الزاوية اليمنى السفلى ؟

1		2	
2	3		
			4

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٨٧) [AMC82007] لنفرض أن $\boxed{n}$ هو مجموع القواسم الموجبة للعدد الصحيح الموجب n. فمثلاً، $\boxed{6} = 1+2+3+6 = 12$. ما قيمة $\boxed{\boxed{11}}$ ؟

(أ) 13 (ب) 20 (ج) 24 (د) 28

(٨٨) [AMC82007]اختر عددين صحيحين موجبين متتاليين مجموعهما أصغر من 100 . ربِّع كلاً منهما وجد الفرق بين مربعيهما. أي من الأعداد التالية يمكن أن يكون الفرق بين مربعيهما ؟

(أ) 2 (ب) 64 (ج) 79 (د) 96

(٨٩) [AMC82008] ذهب سلطان إلى مدينة ألعاب ومعه 150ريال. اشترى وجبة غداء بقيمة 30ريال وصرف على الألعاب ضعف هذا المبلغ. كم ريالاً بقي معه ؟

(أ) 30 (ب) 40 (ج) 50 (د) 60

(٩٠) [AMC82008] استقل أبو أحمد سيارته صباح السبت للذهاب إلى عمله ولاحظ أن قراءة عداد سيارته هو 1441كم. بعد أن قاد سيارته لأربع ساعات يوم السبت وست ساعات أخرى يوم الأحد لاحظ أن قراءة عداد السيارة هو 2291كم. ما معدل سرعته بالكم في الساعة خلال يومي السبت والأحد ؟

(أ) 70 (ب) 75 (ج) 80 (د) 85

(٩١) [AMC82008] إذا كان $\frac{3}{5} = \frac{M}{45} = \frac{60}{N}$ فإن $M + N$ يساوي:

(أ) 27 (ب) 29 (ج) 45 (د) 127

(٩٢) [AMC82008] استناداً إلى احصائية سابقة وجدت احدى شركات بيع السيارات أنه مقابل كل 4 سيارات سباق تبيعها يكون عدد السيارات العائلية التي تبيعها هو 7 سيارات. توقع صاحب الشركة من بيع 28 سيارة

سباق في الشهر القادم. ما عدد السيارات العائلية المتوقع بيعها في الشهر القادم ؟

(أ) 7　(ب) 32　(ج) 35　(د) 49

(٩٣) [AMC82009] لنفرض أن x و y هما أصغر عددين صحيحين موجبين بحيث يكون $360x$ مربعاً كاملاً و $360y$ مكعباً. ما قيمة المجموع $x+y$ ؟

(أ) 80　(ب) 85　(ج) 115　(د) 165

(٩٤) [AMC82009] إذا كانت A، B، C، D تمثل مراتب (أعداد من 0 إلى 9) وكان

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ + & C & A \\ \hline & D & A \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{ccc} & A & B \\ - & C & A \\ \hline & & A \end{array}$$

فما المرتبة التي تقابل الحرف D ؟

(أ) 5　(ب) 6　(ج) 7　(د) 9

(٩٥) [AMC82010] يوجد ثلاثة مدرسي رياضيات في مدرسة إقليدس المتوسطة هم الأستاذ محسن والأستاذ حسن والأستاذ حسين. سيتقدم لمسابقة $AMC8$ هذه السنة 11 تلميذاً من تلاميذ الأستاذ محسن و 8 تلاميذ من تلاميذ الأستاذ حسن و 9 تلاميذ من تلاميذ الأستاذ حسين. كم عدد تلاميذ مدرسة إقليدس المتوسطة الذين سيتقدمون لمسابقة $AMC8$ لهذا العام ؟

(أ) 26　(ب) 27　(ج) 28　(د) 29

(١٣.١) إجابات المسائل غير المحلولة

(١) د	(٢) ب	(٣) د	(٤) أ	(٥) ج
(٦) أ	(٧) ب	(٨) أ	(٩) د	(١٠) ب
(١١) ب	(١٢) أ	(١٣) ج	(١٤) ج	(١٥) د
(١٦) د	(١٧) ب	(١٨) ب	(١٩) ب	(٢٠) ج
(٢١) ج	(٢٢) د	(٢٣) ب	(٢٤) ج	(٢٥) د
(٢٦) د	(٢٧) أ	(٢٨) أ	(٢٩) ب	(٣٠) د
(٣١) ب	(٣٢) د	(٣٣) د	(٣٤) أ	(٣٥) أ
(٣٦) ج	(٣٧) ج	(٣٨) د	(٣٩) أ	(٤٠) أ
(٤١) د	(٤٢) ج	(٤٣) د	(٤٤) ج	(٤٥) ب
(٤٦) د	(٤٧) ج	(٤٨) ج	(٤٩) د	(٥٠) ب
(٥١) د	(٥٢) ب	(٥٣) د	(٥٤) د	(٥٥) أ
(٥٦) د	(٥٧) د	(٥٨) د	(٥٩) ب	(٦٠) أ
(٦١) د	(٦٢) ب	(٦٣) أ	(٦٤) د	(٦٥) د
(٦٦) د	(٦٧) أ	(٦٨) ج	(٦٩) ج	(٧٠) ب
(٧١) ب	(٧٢) أ	(٧٣) ب	(٧٤) ب	(٧٥) ب
(٧٦) ب	(٧٧) د	(٧٨) ب	(٧٩) أ	(٨٠) ج
(٨١) ج	(٨٢) د	(٨٣) د	(٨٤) ج	(٨٥) د
(٨٦) ب	(٨٧) د	(٨٨) ج	(٨٩) د	(٩٠) د
(٩١) د	(٩٢) د	(٩٣) ب	(٩٤) د	(٩٥) ج

الفصل الثاني

المعادلات
Equations

(٢.١) المعادلات الخطية [Linear Equations]

المعادلة هي أي علاقة مساواة بين طرفين. فمثلاً، كل من $3x = 2$، $5x^2 + x = 5$، $xy = 15$، $\sqrt{x} = 3x$ معادلة. المتغير (variable) أو المجهول (unknown) هو أي مقدار غير معلوم، فمثلاً، كل من x و y في المعادلات أعلاه متغير. أما الثابت (constant) فهو مقدار يأخذ قيمة واحدة في المعادلة، فمثلاً كل من 2، 5، 15 مقدار ثابت في المعادلات أعلاه. كما يسمى العدد 3 الذي يظهر في الحد $3x$ بمعامل (coefficient) المتغير x و العدد 5 في الحد $5x^2$ هو معامل x^2 وهكذا. تعرف درجة حد على أنها مجموع قوى متغيراته، فمثلاً، درجة الحد $3x^2y^3$ تساوي 5. و تعرف درجة المعادلة على أنها درجة أعلى حد من حدودها. فمثلاً، درجة المعادلة $2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ تساوي 3.

إن أبسط أنواع المعادلات هي المعادلة الخطية (أو معادلة الدرجة الأولى) وهي معادلة درجتها تساوي 1. على سبيل المثال، كل من المعادلات $2x = 5$، $2x - y = 3$، $x + y + 2z = 0$ معادلة خطية وكل من المعادلات $x^2y = 2$، $x^2 + 2y = 1$، $4^x + 2y = 6$ معادلة غير خطية. حل (solution) المعادلة يعني

إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق المساواة في المعادلة.

مثال (١) حل المعادلة $x + 3 = 7$.

الحل

$$x + 3 = 7$$
$$x = 7 - 3$$
$$x = 4 .$$

◇

مثال (٢) حل المعادلة $2z + 4 = -7$.

الحل

$$2z + 4 = -7$$
$$2z = -7 - 4$$
$$2z = -11$$
$$z = \frac{-11}{2} .$$

◇

مثال (٣) حل المعادلة $\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - 6x\right) = \frac{9}{4}$.

الحل

$$\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - 6x\right) = \frac{9}{4}$$
$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - 6x\right) = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4}$$
$$\frac{4}{3} - 6x = \frac{3}{2}$$
$$-6x = \frac{3}{2} - \frac{4}{3}$$
$$-6x = \frac{1}{6}$$
$$x = \frac{1}{6} \div (-6)$$

$$x = -\frac{1}{36}.$$ ◇

مثال (٤) حل المعادلة $1 - 3(2x+1) = x - 3$.

الحل

$$\begin{aligned} 1 - 3(2x+1) &= x - 3 \\ 1 - 6x - 3 &= x - 3 \\ -6x - x &= -3 + 2 \\ -7x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$ ◇

مثال (٥) إذا كان $\frac{x-a}{x+b} = 4c$ **فجد** x بدلالة a، b، c.

الحل

$$\begin{aligned} \frac{x-a}{x+b} &= 4c \\ x - a &= 4c(x+b) \\ x - a &= 4cx + 4bc \\ x - 4cx &= a + 4bc \\ x(1-4c) &= a + 4bc \\ x &= \frac{a+4bc}{1-4c}. \end{aligned}$$ ◇

مثال (٦) حل المعادلة $\frac{18x^2 - 21x - 72}{3x^2 - 20x + 32} = -5$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{18x^2 - 21x - 72}{3x^2 - 20x + 32} &= -5 \\ \frac{3\left(6x^2 - 7x - 24\right)}{3x^2 - 20x + 32} &= -5 \end{aligned}$$

$$\frac{3(2x+3)(3x-8)}{(3x-8)(x-4)} = -5$$
$$\frac{3(2x+3)}{x-4} = -5$$
$$6x+9 = -5x+20$$
$$11x = 11$$
$$.\ x = 1$$

◇

مثال (٧)[AHSME 1950] قسمنا العدد 64 إلى ثلاثة أجزاء بنسبة $6:4:2$. جد أصغر هذه الأجزاء.

الحل

الأعداد التي تتناسب مع 2، 4، 6 هي $2x$، $4x$، $6x$. عندئذ،

$$2x+4x+6x = 46$$
$$12x = 64$$
$$x = 5\frac{1}{3}$$

إذن، أصغر الأجزاء هو العدد $2x = 10\frac{2}{3}$.

◇

مثال (٨)[AHSME 1950] بدأ أحمد وبدر المشي في اللحظة نفسها من جامعة الإمام محمد إلى مطار الملك خالد الذي يبعد عن جامعة الإمام مسافة 30 كم. بدر مشى بسرعة تزيد عن سرعة أحمد 2 كم في الساعة. في اللحظة التي وصل فيها بدر إلى مطار الملك خالد عاد أدراجه والتقى أحمد على بعد 6 كم من مطار الملك خالد. ما هي سرعة أحمد ؟

الحل

لنفرض أن سرعة أحمد تساوي r. الزمن الذي استغرقه أحمد يساوي $\frac{24}{r}$ والزمن

الذي استغرقه بدر يساوي $\frac{36}{r+2}$.إذن،

$$\begin{aligned}\frac{24}{r} &= \frac{36}{r+2}\\ 36r &= 24r+48\\ 12r &= 48\\ r &= 4\end{aligned}$$

إذن، سرعة أحمد تساوي 4 كم في الساعة. ◇

مثال (٩)[AMC12A 2005] إذا كان حل المعادلة $2x+7=3$ هو أيضاً حلاً للمعادلة $bx-10=-2$ فما هي قيمة b ؟

الحل

$$\begin{aligned}2x+7 &= 3\\ 2x &= 3-7=-4\\ x &= -2\end{aligned}$$

بما أن $x=-2$ حل للمعادلة $bx-10=-2$ فنرى أن

$$\begin{aligned}b(-2)-10 &= -2\\ -2b &= -2+10\\ -2b &= 8\\ b &= -4\end{aligned}$$
. ◇

مثال (١٠)[AMC10 2001] مجموع عددين يساوي S، أضفنا العدد 3 لكل من العددين وبعد ذلك ضاعفنا كلاً من العددين الناتجين. جد المجموع الجديد الذي نحصل عليه بدلالة S.

الحل

لنفرض أن العددين هما a و b. بداية كان $S=a+b$. المجموع الجديد هو $2(a+3)+2(b+3)=2(a+b)+12=2S+12$. ◇

مثال (١١)[MAΘ 1992] يستطيع 30 شخصاً إنشاء طريق خلال 60 يوماً. بعد اليوم العاشر قررت الشركة أنها تريد إنجاز الطريق خلال 30 يوماً وليس 60 يوماً كما كان مقرراً. ما هو عدد الأشخاص الذين يتوجب إضافتهم إلى الطاقم الأصلي لإنجاز المهمة ؟

الحل

يستطيع 30 شخصاً إنجاز $\frac{1}{60}$ من الطريق في يوم واحد. ومن ثم يستطيع الشخص الواحد إنجاز $\frac{1}{1800} = \frac{1}{30} \times \frac{1}{60}$ من الطريق في اليوم الواحد.

أنجز الطاقم المكون من 30 شخصاً الجزء $\frac{1}{6} = 10\left(\frac{1}{60}\right)$ من الطريق خلال العشرة أيام الأولى. بعد تغير خطة العمل يتوجب على الطاقم إنشاء $\frac{5}{6}$ من الطريق خلال 20 يوماً.لنفرض أن x هو عدد الأشخاص الذين تمت إضافتهم إلى الطاقم. عندئذ، يكون عدد أشخاص الطاقم الجديد هو $x + 30$.

بما أن كل شخص يستطيع إنجاز $\frac{1}{1800}$ من الطريق في يوم واحد فباستطاعة $x + 30$ شخصاًإنجاز $\frac{x+30}{1800}$ من الطريق في يوم واحد. إذن،

$$\frac{20(x+30)}{1800} = \frac{5}{6}$$
$$20x + 600 = 1500$$
$$20x = 900$$
$$x = 45$$

وبهذا يكون عدد الأشخاص اللذين أضيفوا إلى الطاقم هو $x = 45$. ◇

(٢.٢) معادلة الدرجة الثانية [Quadratic Equation]

معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد تأخذ الصيغة

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث a، b، c أعداد ثابتة و $a \neq 0$.

توجد عدة طرق لحل معادلة الدرجة الثانية، نقدم ثلاثة من هذه الطرق.

(٢.٣) استخدام التحليل [By Factorization]

لحل معادلة الدرجة الثانية باستخدام التحليل نقوم بإعادة كتابتها بحيث يكون أحد طرفيها يساوي صفراً ثم نحلل الطرف الآخر ونستخدم القاعدة الهامة:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ أو } b = 0.$$

ومن ثم نحصل على الحلين بحل كل من المعادلتين الخطيتين الناتجتين.

مثال (١٢) حل المعادلة $3x^2 + 5x = 0$.

الحل

$$3x^2 + 5x = 0$$
$$x(3x + 5) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad 3x + 5 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-5}{3}$$

إذن، حلا المعادلة (يسميان أيضاً جذرا المعادلة أو صفرا المعادلة) هما $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{-5}{3}$. ◇

مثال (١٣) حل المعادلة $16x^2+9=24x$.

الحل

$$\begin{aligned}16x^2+9&=24x\\16x^2-24x+9&=0\\(4x-3)^2&=0\\4x-3&=0\\x&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

لاحظ أن جذري المعادلة متساويان وهما $x_1=x_2=\frac{3}{4}$. ◇

مثال (١٤) حل المعادلة $3x^2=16x+12$.

الحل

$$\begin{aligned}3x^2&=16x+12\\3x^2-16x-12&=0\\(3x+2)(x-6)&=0\end{aligned}$$

$$3x+2=0 \quad \text{أو} \quad x-6=0$$

$$x=\frac{-2}{3} \quad \text{أو} \quad x=6$$

إذن، $x_1=\frac{-2}{3}$ و $x_2=6$. ◇

مثال (١٥) حل المعادلة $\frac{x+3}{1-x}=-\frac{9}{x}$.

الحل

$$
\begin{aligned}
\frac{x+3}{1-x} &= -\frac{9}{x}\\
-9(1-x) &= x(x+3)\\
-9+9x &= x^2+3x\\
x^2-6x+9 &= 0\\
(x-3)^2 &= 0
\end{aligned}
$$

إذن، $x_1 = x_2 = 3$. ◇

مثال (١٦) حل المعادلة $(x+1)^2 = 2x^2 - 5x + 11$.

الحل

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^2 = 2x^2-5x+11\\
&x^2+2x+1 = 2x^2-5x+11\\
&x^2-7x+10 = 0\\
&(x-2)(x-5) = 0
\end{aligned}
$$

$x - 5 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$x = 5$ أو $x = 2$

إذن، $x_1 = 2$ و $x_2 = 5$. ◇

(٤.٢) إكمال المربع [Completing The Square]

إذا أردنا استخدام طريقة التحليل لحل المعادلة $x^2 + 6x - 2 = 0$ فإننا سنواجه صعوبة في تحليل المقدار $x^2 + 6x - 2$. ولكن من الممكن حل هذه المعادلة بطريقة إكمال المربع حيث يمكن تحويل معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ إلى معادلة مكافئة على الصورة $(x+p)^2 = q$، وهذه معادلة يسهل حلها. سنوضح

هذه الطريقة ببعض الأمثلة.

مثال (١٧) حل المعادلة $x^2 + 6x - 2 = 0$.

الحل

تتم خطوات إكمال المربع على النحو التالي:

(١) نقوم بنقل الحد الثابت إلى الطرف الأيمن فنحصل على

$$x^2 + 6x = 2$$

(٢) نأخذ نصف معامل x وهو 3 في هذه الحالة ونربعه ونضيف الناتج إلى طرفي المعادلة فنحصل على

$$x^2 + 6x + 9 = 2 + 9$$

(٣) الآن الطرف الأيسر من المعادلة مربع كامل، وبهذا نحصل على المعادلة المكافئة

$$(x + 3)^2 = 11$$

(٤) نأخذ الآن الجذر التربيعي للطرفين فنحصل على

$$x + 3 = \pm\sqrt{11}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{11}$$

إذن، $x_1 = -3 + \sqrt{11}$ و $x_2 = -3 - \sqrt{11}$. ◇

مثال (١٨) حل المعادلة $x^2 + 6x + 11 = 0$.

الحل

باتباع خطوات اكمال المربع نحصل على

$$x^2 + 6x = -11$$
$$x^2 + 6x + 9 = -11 + 9$$
$$(x + 3)^2 = -2$$

هنا، لدينا مربع مقدار سالب ومن ثم لا يمكن إيجاد جذر تربيعي حقيقي لهذا المقدار وبهذا فالمعادلة ليس لها جذور حقيقية ولكن جذريها مركبان وسنبين ذلك عند دراستنا للأعداد المركبة في كتاب الجبر (الجزء الثاني) من هذه السلسلة. ◇

ملحوظة

عند اتباع طريقة إكمال المربع لحل معادلة الدرجة الثانية يجب التأكد من أن معامل x^2 يساوي 1 فإذا لم يكن كذلك فنقوم أولاً بقسمة طرفي المعادلة على هذا المعامل والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (١٩) حل المعادلة $2x^2 - 10x + 3 = 0$.

الحل

$$\begin{aligned}
2x^2 - 10x + 3 &= 0 \\
x^2 - 5x + \frac{3}{2} &= 0 \\
x^2 - 5x &= -\frac{3}{2} \\
x^2 - 5x + \frac{25}{4} &= -\frac{3}{2} + \frac{25}{4} \\
\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{19}{4} \\
x - \frac{5}{2} &= \pm\frac{\sqrt{19}}{2} \\
x &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}
\end{aligned}$$

إذن، $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}$ و $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}$. ◇

(٢.٥) قانون معادلة الدرجة الثانية [The Quadratic Formula]

يصعب حل العديد من معادلات الدرجة الثانية باستخدام طريقة التحليل أو إكمال المربع. ولهذا يوجد قانون عام لحل معادلة الدرجة الثانية وسنبين هنا كيفية الحصول على هذا القانون.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a \neq 0.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{(قسمنا طرفي المعادلة على } a\text{)}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{(أكملنا المربع)}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

إذن، $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ هما جذرا المعادلة.

ملحوظة

يمكن استخدام القانون العام لحل جميع معادلات الدرجة الثانية ولكن لا يفضل استخدامه إذا كان التحليل سهلاً.

مثال (٢٠) حل المعادلة $(3x+1)^2 = -2x$.

الحل

بكتابة المعادلة على الصيغة المطلوبة نجد أن المعادلة تكافئ $9x^2 + 8x + 1 = 0$.

الآن، بتطبيق القانون العام نحصل على

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{64-36}}{18} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{28}}{18} \\ &= \frac{-8 \pm 2\sqrt{7}}{18} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{9} \end{aligned}$$

إذن، $x_1 = \frac{-4+\sqrt{7}}{9}$ و $x_2 = \frac{-4-\sqrt{7}}{9}$. ◇

مثال (٢١) حل المعادلة $2x - \frac{1}{x} = 3$.

الحل

بوضع المعادلة على الصيغة المناسبة نجد أن

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 &= 3x \\ 2x^2 - 3x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

الآن، نستخدم القانون العام فنحصل على

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{4} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

إذن، $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ و $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$. ◇

(٢.٦) مميز معادلة الدرجة الثانية [The Discriminant of The Quadratic]

يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ الذي يظهر في القانون العام داخل الجذر التربيعي، مميز معادلة الدرجة الثانية وسنرمز له بالرمز Δ. أي أن

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

وبهذا يمكن كتابة القانون العام على الصورة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

لدينا الحالات التالية:

(١) إذا كان $\Delta = 0$ فلمعادلة الدرجة الثانية جذر مكرر واحد هو $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

(٢) إذا كان $\Delta > 0$ فلمعادلة الدرجة الثانية جذران حقيقيان مختلفان هما $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

(٣) إذا كان $\Delta < 0$ فإن $\sqrt{\Delta}$ ليس عدداً حقيقياً. وفي هذه الحالة جذرا معادلة الدرجة الثانية غير حقيقين.

(٤) إذا كانت الأعداد a، b، c كسرية وكان Δ مربعاً كاملاً فجذرا المعادلة عددان كسريان يمكن إيجادهما بطريقة التحليل.

مثال (٢٢) جد قيمة m بحيث يكون للمعادلة $x^2 - 2x + m = 0$:

(أ) جذران مكرران (ب) جذران حقيقيان مختلفان (ج) جذران غير حقيقين.

الحل

المميز هو $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times 1\times m = 4 - 4m$

(أ) لكي يكون للمعادلة جذران مكرران فإن $\Delta = 0$. من ذلك يكون $4 - 4m = 0$. أي أن $m = 1$.

(ب) لكي يكون الجذران حقيقيين مختلفين فيجب أن يكون $\Delta > 0$. أي أن $4 - 4m > 0$. وبحل هذه المتباينة الخطية (سندرس ذلك في الفصل الثالث) نرى أن $m < 1$.

(ج) لكي يكون جذرا المعادلة غير حقيقين فيجب أن يكون $\Delta < 0$. أي أن $4 - 4m < 0$. وبحل هذه المتباينة نجد أن $m > 1$. ◇

(٢.٧) مجموع وحاصل ضرب الجذرين [Sum And Products of The Roots]

لنفرض أن α و β هما جذرا معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$. عندئذ،

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta) \end{aligned}$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $a \neq 0$ نجد أن

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

وبمقارنة المعاملات نحصل على ما يسمى علاقات فــيتاي وهي

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}\ .$$

مثال (٢٣) إذا كان مجموع جذري المعادلة $kx^2 - (1+k)x + (3k+2) = 0$ يساوي ضعف حاصل ضربهما فجد قيمة k ومن ثم جد الجذرين.

الحل

$a = k$، $b = -(1+k)$، $c = 3k+2$. الآن، لنفرض أن α و β هما جذرا المعادلة. عندئذ،

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2\alpha\beta \\ -\frac{b}{a} &= 2\left(\frac{c}{a}\right) \\ \frac{1+k}{k} &= 2\left(\frac{3k+2}{k}\right) \\ 6k^2 + 4k &= k + k^2 \\ 5k^2 + 3k &= 0 \\ k(5k+3) &= 0 \end{aligned}$$

ولذا فإن $k = 0$ أو $k = -\frac{3}{5}$. وبما أن $k \neq 0$ (لماذا ؟) فنرى أن $k = -\frac{3}{5}$ بالتعويض عن k في المعادلة نجد أن.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} &= 0 \\ 3x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ (3x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

إذن، $x_1 = \frac{1}{3}$ و $x_2 = -1$. ◇

مثال (٢٤) ليكن α و β جذري المعادلة $x^2 - 6x + 7 = 0$. جد معادلة من الدرجة الثانية جذراها $\alpha + \frac{1}{\beta}$ و $\beta + \frac{1}{\alpha}$.

الحل

مجموع جذري المعادلة المطلوبة هو:

$$\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6+\frac{6}{7}=\frac{48}{7}$$

حاصل ضرب جذري المعادلة المطلوبة هو:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=7+\frac{1}{7}+2=\frac{64}{7}$$

إذن المعادلة المطلوبة هي:

$$7x^2-48x+64=0$$ ◇

نقدم الآن بعض الأمثلة الإضافية الذي يحتاج حلها إلى استخدام معادلة الدرجة الثانية.

مثال (٢٥) لدينا سلك طوله 12سم. هل من الممكن ثني هذا السلك ليكون ضلعي زاوية قائمة لمثلث مساحته 20سم٢ ؟

الحل

نفرض أن x هو طول أحد الضلعين. عندئذ، $12-x$ هو طول الضلع الآخر. ولنفرض أن A هي مساحة المثلث. من ذلك نجد أن

$$A=\frac{1}{2}x(12-x)$$

$$\frac{1}{2}x(12-x)=20$$

$$x(12-x)=40$$

$$12x-x^2-40=0$$

$$x^2-12x+40=0$$

وباستخدام القانون العام لمعادلة الدرجة الثانية نجد أن

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

وهذا عدد غير حقيقي. ولذا فالإجابة هي لا. ◇

مثال (٢٦) عددان فرديان متتاليان حاصل ضربهما يساوي 255. ما هذان العددان ؟

الحل

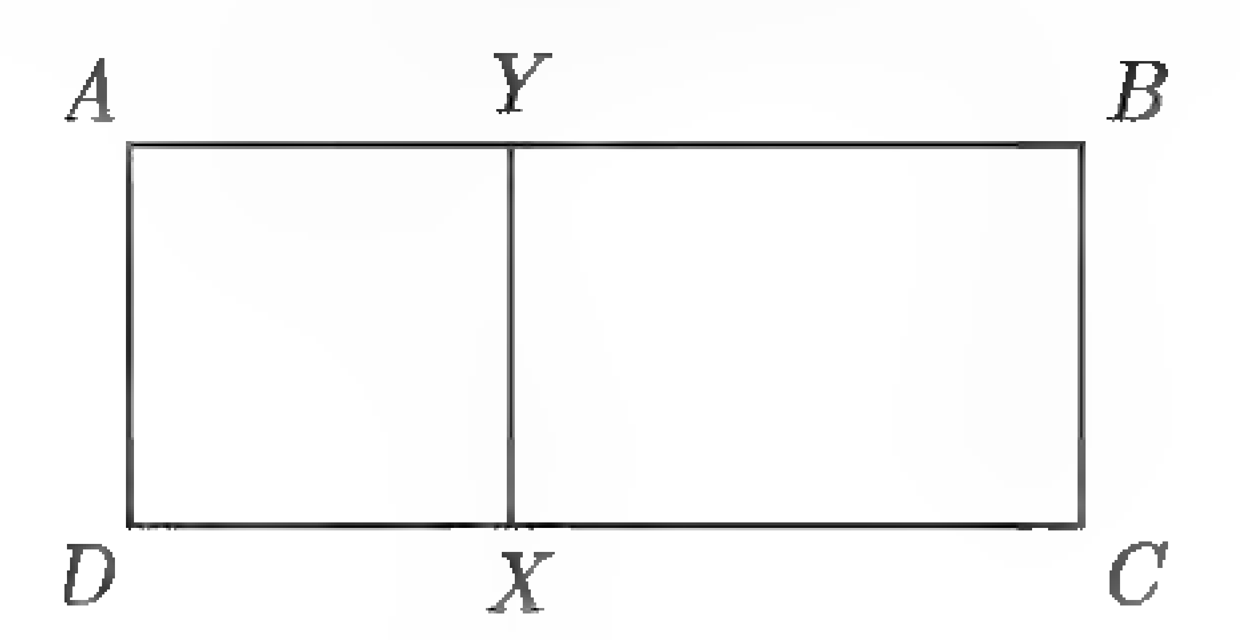
لنفرض أن أحد العددين يساوي x . عندئذ، $x+2$ هو العدد الآخر. الآن

$$x(x+2) = 255$$
$$x^2 + 2x - 255 = 0$$
$$(x+17)(x-15) = 0$$

إذن، $x=-17$ أو $x=15$.

وبهذا فالعددان هما -17 و -15 أو 15 و 17 . ◇

مثال (٢٧) المستطيل الذهبي هو مستطيل يمكن تقسيمه برسم مستقيم مواز للضلع الأصغر (عرضه) إلى مربع و مستطيل أصغر بحيث يكون المستطيلان الكبير و الصغير متشابهان. أي إذا كان المستطيل $ABCD$ المبين في الشكل أدناه هو مستطيلاً ذهبياً فإن $ADXY$ مربع وأن $BCXY$ مستطيل يشبه المستطيل $ABCD$. تسمى النسبة $\frac{AB}{AD}$ النسبة الذهبية. باعتبار أن طول AB يساوي x وطول AD يساوي 1، أثبت أن النسبة الذهبية هي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



الحل

من تشابه المستطيلين $ABCD$ و $BCXY$ نجد أن

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{YB}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

وباستخدام قانون معادلة الدرجة الثانية نجد أن

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

إذن، النسبة الذهبية $x = \frac{AB}{AD}$ تساوي $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (لماذا ؟) ◇

مثال (٢٨) إذا نقصت سرعة طائرة بمقدار 120كم في الساعة فإنها ستحتاج $\frac{1}{2}$ ساعة زيادة لقطع مسافة 1000كم. ما هي سرعة الطائرة ؟

الحل

لنفرض أن s هي سرعة الطائرة وأن t هو الزمن المستغرق لقطع مسافة 1000 كم. عندئذ، $s = \frac{1000}{t}$ أو $t = \frac{1000}{s}$. الآن، عندما تصبح السرعة $s - 120$ يكون الزمن اللازم لقطع مسافة 1000كم هو $t + \frac{1}{2}$. إذن،

$$s-120=\frac{1000}{t+\frac{1}{2}}$$

$$(s-120)\left(t+\frac{1}{2}\right)=1000$$

$$(s-120)\left(\frac{1000}{s}+\frac{1}{2}\right)=1000$$

$$(s-120)\left(\frac{2000+s}{2s}\right)=1000$$

$$(s-120)(2000+s)=2000s$$

$$2000s+s^2-240000-120s=2000s$$

$$s^2-120s-240000=0$$

وباستخدام القانون العام نجد أن

$$s=\frac{120\pm\sqrt{(120)^2-4(1)(-240000)}}{2}$$

$$s=\frac{120\pm\sqrt{974400}}{2}$$

$$s=\frac{120\pm 987.1}{2}$$

إذن، $s=\frac{120+987.1}{2}=553.6$. ◇

مثال (٢٩) اشترى أحمد عدد x من فطائر الجبنة بمبلغ 60 ريالاً. ولكنه وجد أنه لو استبدل فطائر الجبنة بفطائر الزعتر لاستطاع أن يشتري بنفس المبلغ عدداً من فطائر الزعتر يزيد بمقدار 3 عن عدد فطائر الجبنة. وإذا خفض له البائع ثمن كل من فطيرة الجبنة وفطيرة الزعتر ريالاً واحداً لكان بإمكانه شراء عدد من فطائر الزعتر يزيد بمقدار 5 عن عدد فطائر الجبنة بالمبلغ نفسه. جد عدد فطائر الجبنة

الذي يتمكن أحمد من شراءه بالسعر الأصلي.

الحل

عدد فطائر الجبنة الأصلي هو x وعدد فطائر الزعتر الأصلي هو $x+3$.

ثمن فطيرة الجبنة الأصلي هو $\frac{60}{x}$ ريال وثمن فطيرة الزعتر الأصلي هو $\frac{60}{x+3}$.

عدد فطائر الجبنة بعد التخفيض هو $\frac{60}{\frac{60}{x}-1}$ وعدد فطائر الزعتر بعض التخفيض

هو $\frac{60}{\frac{60}{x+3}-1}$. إذن،

$$\frac{60}{\frac{60}{x+3}-1}-\frac{60}{\frac{60}{x}-1}=5$$
$$\frac{60(x+3)}{57-x}-\frac{60x}{60-x}=5$$
$$60(x+3)(60-x)-60x(57-x)=5(57-x)(60-x)$$
$$12\left(-x^2+57x+180-57x+x^2\right)=3420-117x+x^2$$
$$2160=x^2-117x+3420$$
$$x^2-117x+1260=0$$
$$(x-12)(x-105)=0$$

إذن، $x=12$ أو $x=105$. ولكن $x=105$ مستحيل لأن ثمن فطيرة الجبنة سيكون في هذه الحالة $\frac{60}{105}-1=-\frac{3}{7}$ وهذا مرفوض. إذن، عدد فطائر الجبنة بالسعر الأصلي هو 12 فطيرة. ◇

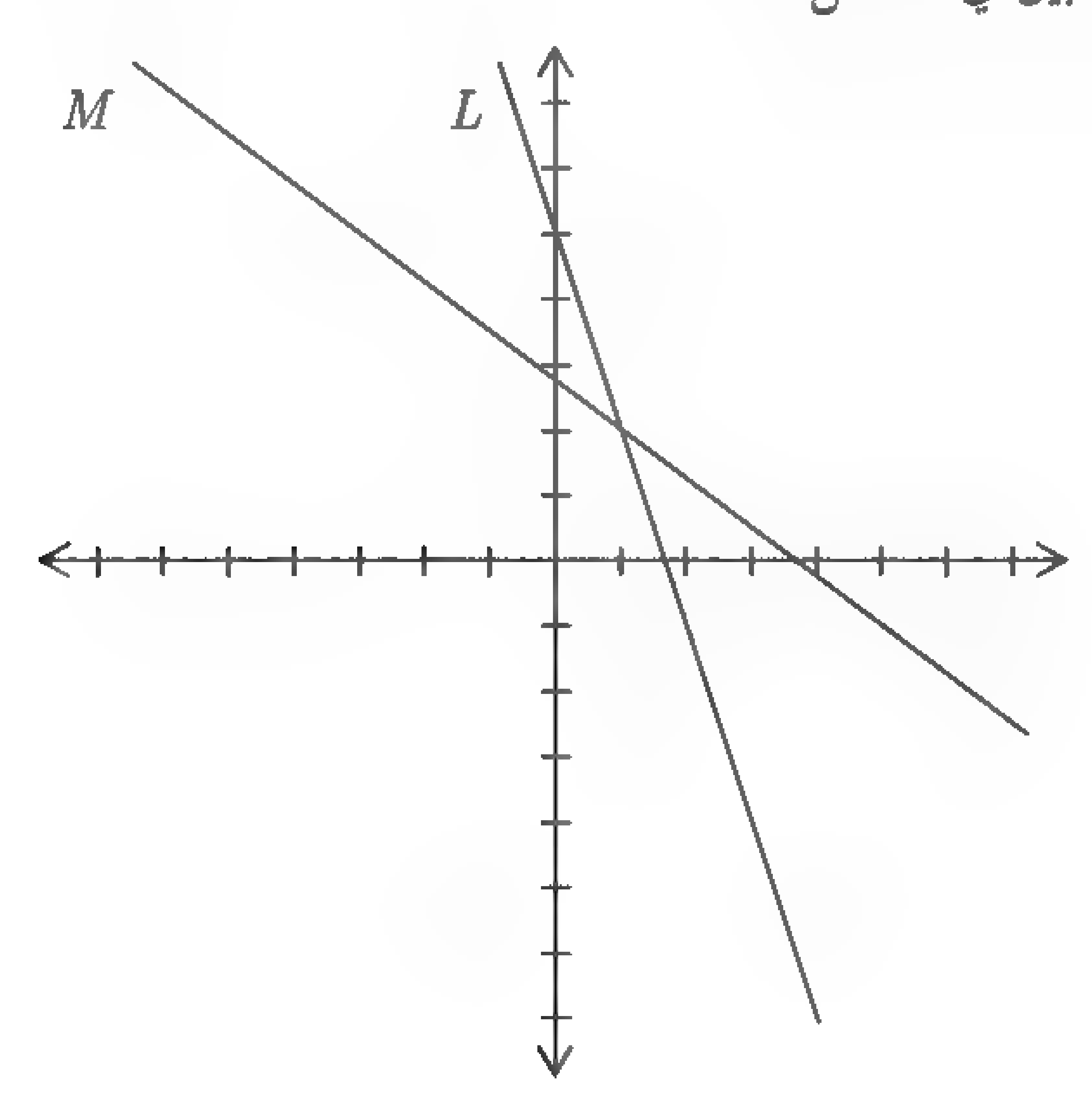
(٢.٨) معادلات في أكثر من متغير

[Equations With More Than One Vriable]

المعادلة الخطية ومعادلة الدرجة الثانية التي درسناها لحد الآن هي معادلات في متغير واحد. لنفرض الآن أن لدينا المعادلة

$$3x + y = 5 \tag{١}$$

لحل هذه المعادلة يتوجب علينا إيجاد قيم x و y التي تحققها. سنستخدم الزوج المرتب (x,y) للتعبير عن حل المعادلة. بالتجريب نرى أن $(-1,8)$ حل للمعادلة. كما أن $(0,5)$ ، $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ ، $(1,2)$ ، $\left(\frac{5}{3},0\right)$ ، $(15,-40)$ هي أيضاً حلول للمعادلة. في الحقيقة عدد الأزواج المرتبة (الحلول) التي تحقق المعادلة هو عدد غير منته. وكما سنرى لاحقاً فإن بيان جميع حلول المعادلة $3x + y = 5$ هو الخط المستقيم L المبين في الشكل أدناه



لنفرض الآن أن لدينا معادلة أخرى هي

$$3x + 4y = 11 \quad (٢)$$

بيان هذه المعادلة هو المستقيم M المبين في الشكل السابق.

تسمى المعادلتان (١) و (٢) نظاماً من المعادلات الخطية في المتغيرين x و y (سندرس أنظمة المعادلات بصورة أكثر تفصيلاً في الجزء الثاني من هذه السلسلة).

لاحظ أن حل النظام هو نقطة تقاطع المستقيمين M و L. توجد عدة طرق لحل أنظمة المعادلات جبرياً، نقدم منها طريقتين ونرجئ دراسة بعض الطرق الأخرى للجزء الثاني من هذه السلسلة.

(٢.٩) طريقة الحذف[Elimination Method]

تعتمد طريقة الحذف على التخلص من أحد المتغيرين والحصول على معادلة في المتغير الآخر.

مثال (٣٠) استخدم طريقة الحذف لحل النظام

$$3x + y = 5 \quad (١)$$

$$3x + 4y = 11 \quad (٢)$$

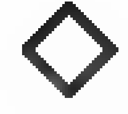
الحل

بضرب المعادلة (١) بالعدد -1 والجمع نحصل على

$$3y = 6$$

من ذلك نجد أن $y = 2$. الآن بالتعويض عن y بالمعادلة (١) نجد أن

$$3x + 2 = 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

إذن، حل النظام هو $(x, y) = (1,2)$. 

(٢.١٠) طريقة التعويض [Substitution Method]

نستخدم هنا إحدى المعادلتين للحصول على متغير بدلالة المتغير الآخر ثم نقوم بتعويض ذلك في المعادلة الأخرى لنحصل على معادلة في متغير واحد.

مثال (٣١) حل النظام المقدم في المثال (٣٠) بطريقة التعويض.

الحل

من المعادلة (١) نجد أن $y = 5 - 3x$. بالتعويض عن y في المعادلة (٢) نجد أن

$$\begin{aligned} 3x + 4(5 - 3x) &= 11 \\ 3x + 20 - 12x &= 11 \\ -9x &= -9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة x في المعادلة $y = 5 - 3x$ نجد أن $y = 5 - 3 \times 1 = 2$.

إذن، حل النظام هو $(x,y) = (1,2)$. ◇

مثال (٣٢) اشترى تاجر 120 آلة حاسبة بثمن x ريالاً لكل منها واشترى 100 كتاباً بثمن y ريالاً لكل منها. ثم وضع 6 الآت حاسبة و 5 كتب في كل كيس وباع الكيس بمبلغ $9x + 6y$ ريالاً. إذا كان المبلغ الذي دفعه التاجر ثمن الآلات الحاسبة والكتب هو 8000 ريالاً وكانت نسبة ربحه تساوي 38% فجد كلاً من x و y.

الحل

الثمن الذي دفعه التاجر هو $120x + 100y$ ريالاً. عدد الأكياس التي باعها التاجر هو $120 \div 6 = 20$ (أو $100 \div 5 = 20$). المبلغ الذي حصل عليه التاجر من المبيعات هو $20(9x + 6y) = 180x + 120y$ ريالاً.الآن، لدينا

$$120x + 100y = 8000 \qquad (١)$$

مكسب التاجر هو

$$180x + 120y - (120x + 100y) = 0.38 \times 8000$$

$$60x + 20y = 3040 \qquad (٢)$$

بضرب المعادلة (٢) بالعدد -2 وإضافة الناتج إلى المعادلة (١) نجد أن

$$60y = 1920$$

$$y = \frac{1920}{60} = 32 \text{ ريال}$$

بالتعويض في المعادلة (١) نجد أن

$$120x + 100(32) = 8000$$

$$120x = 8000 - 3200$$

$$120x = 4800$$

$$x = 40 .$$

◇

(٢.١١) مسائل محلولة

(١) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $\frac{3+2x}{x-3} = 4$ ؟

(أ) $\frac{9}{2}$ (ب) $-\frac{9}{2}$ (ج) $\frac{15}{2}$ (د) $-\frac{15}{2}$

(٢) [Mathcounts 1990] يوجد بحوزة أحمد 16 ورقة نقدية من فئتي الخمسة ريالات والعشرة ريالات. إذا كان مجموع ما بحوزة أحمد هو 105 ريالاً فما عدد الأوراق النقدية من فئة الخمسة ريالات التي يملكها أحمد ؟

(أ) 11 (ب) 5 (ج) 8 (د) 10

(٣) ما جذرا المعادلة $5 - 4x^2 = 3(2x+1) + 2$ ؟

(أ) 0 و $\frac{3}{2}$ (ب) 0 و $-\frac{3}{2}$ (ج) 0 و $\frac{2}{3}$ (د) 0 أو $-\frac{2}{3}$

(٤) ما جذرا المعادلة $x + \frac{2}{x} = 3$ ؟

(أ) -1 و -2 (ب) -1 و 2 (ج) 1 و -2 (د) 1 و 2

(٥) ما جذرا المعادلة $5x^2 - 15x + 2 = 0$ ؟

(أ) $-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{37}{20}}$ (ب) $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{37}{20}}$

(ج) $-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{21}}$ (د) $\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{21}}$

(٦) ما جذرا المعادلة $(x+2)(x-1) = 2 - 3x$ ؟

(أ) $-2 \pm 2\sqrt{2}$ (ب) $2 \pm 2\sqrt{2}$

(ج) $-3 \pm 3\sqrt{2}$ (د) $3 \pm 3\sqrt{2}$

(٧) ما جذرا المعادلة $\frac{x-1}{2-x} = 2x + 1$ ؟

(أ) $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$ (ب) $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$

(ج) $1 \pm \sqrt{7}$ (د) $-1 \pm \sqrt{7}$

(٨) ما قيمة m التي تجعل للمعادلة $x^2 + 4x + m = 0$ جذران مكرران ؟

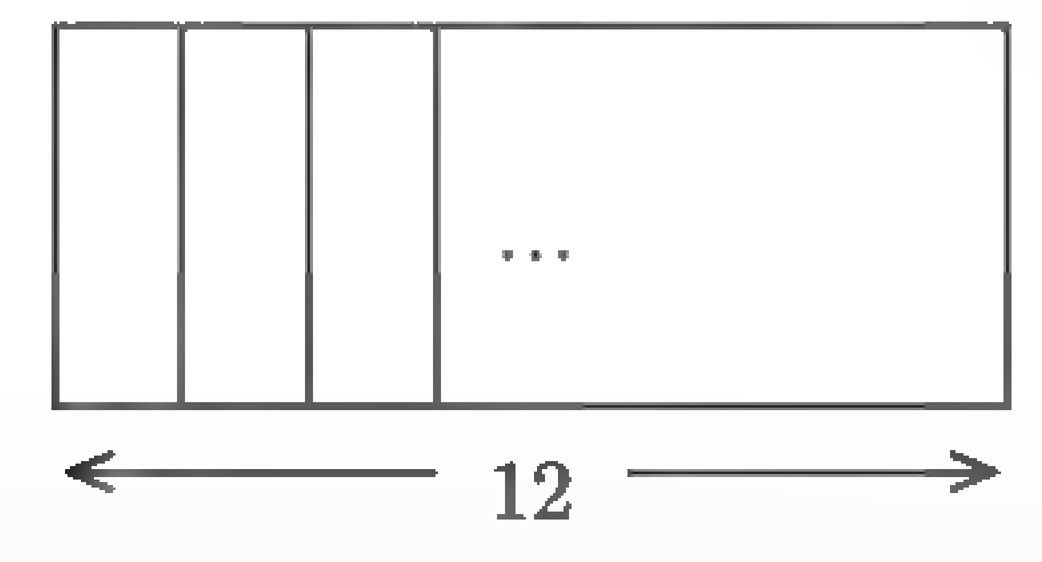
(أ) 4 (ب) 5 (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٩) إذا كان جذرا المعادلة $ax^2 - 6x + a - 2 = 0$ حيث $a \neq 0$ هما α و 2α فما قيم a ؟

(أ) $a = 2$ ، $a = 4$ (ب) $a = -2$ ، $a = 4$

(ج) $a = -2$ ، $a = -4$ (ج) $a = 2$ ، $a = -4$

(١٠) استخدمنا ورق جدران متساوية العرض لتغطية جدار طوله 12 متر كما هو مبين في الشكل.



إذا استبدلنا ورق الجدران بورق آخر يزيد عرضه كل منها بمقدار 0.2 متر عن عرض الورق السابق لاستطعنا توفير ورقتين. ما عرض ورق الجدران المستخدم لغرض التوفير ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ متر (ب) 1متر (ج) $1\frac{1}{2}$ متر (د) 2 متر

(١١) اتفق مجموعة من الرجال المتقاعدين على القيام برحلة فاستأجروا حافلة بمبلغ 1600 ريال. في اللحظة الأخيرة تخلف 8 منهم بسبب تعرضهم لوعكة

صحية مما أدى إلى أن يدفع كل من بقية الرجال 10 ريالات زيادة لتغطية أجرة الحافلة. ما هو عدد الرجال الذين قاموا بالرحلة ؟

(أ) 32 (ب) 40 (ج) 48 (د) 56

(١٢) ما طول المستطيل الناشئ عن ثني سلك طوله 20 سم إذا علمت أن مساحة المستطيل تساوي 30 سم٢ ؟

(أ) 3 سم (ب) 5 سم

(ج) 6 سم (د) لا يمكن إنشاء مثل هذا المستطيل

(١٣) عددان صحيحان موجبان زوجيان متتاليان حاصل ضربهما يساوي 360. ما مجموعهما ؟

(أ) 18 (ب) 20 (ج) 38 (د) 40

(١٤) لنفرض أن المستقيم $y = 3x + c$ يقطع $y = x^2 + x - 5$ في نقطتين مختلفتين. إحدى قيم c التي تحقق ذلك هي

(أ) 0 (ب) -8 (ج) -10 (د) -12

(١٥) إذا كان α و β جذري المعادلة $2x^2 - 3x = 4$ فما معادلة الدرجة الثانية التي لها الجذرين $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ ؟

(أ) $3x^2 + 3x = 2$ (ب) $2x^2 + 3x = 4$

(ج) $4x^2 + 3x = 2$ (د) $4x^2 - 3x = 2$

(١٦) مثلث قائم الزاوية يزيد طول أحد ضلعي القائمة عن طول ضلع القائمة الآخر بمقدار 7 سم ويزيد طول الوتر عن طول ضلع القائمة الأكبر بمقدار 2سم. ما طول الوتر ؟

(أ) 15 سم (ب) 17 سم (ج) 19 سم (د) 21 سم

(١٧) [AHSME 1968] إذا كان x و y عددين غير صفريين يحققان $x = 1 + \frac{1}{y}$ و $y = 1 + \frac{1}{x}$ فإن y يساوي

(أ) $x - 1$ (ب) $1 - x$ (ج) $-x$ (د) x

(١٨) [Mathcounts 1990] قسمنا العدد 66 إلى عددين كل منهما أصغر من 66. إذا كان أحدهما يزيد بمقدار 3 عن ضعف العدد الآخر فما العدد الأكبر ؟

(أ) 21 (ب) 33 (ج) 41 (د) 45

(١٩) [AHSME 1960] للمعادلة $x - \frac{7}{x-3} = 3 - \frac{7}{x-3}$

(أ) عدد غير منته من الجذور الصحيحة (ج) لا يوجد لها جذور

(ب) جذر صحيح واحد فقط (د) جذران متساويان غير صحيحين

(٢٠) $ABCD$ مستطيل يزيد طوله عن ضعف عرضه بمقدار 3 سم. $PQRS$ مستطيل آخر يزيد عرضه عن عرض المستطيل $ABCD$ بمقدار 2 سم ويزيد طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار 4 سم. إذا كانت مساحة المستطيل $PQRS$ هي ضعف مساحة المستطيل $ABCD$ فما عرض المستطيل $ABCD$ ؟

(أ) $5 + 3\sqrt{5}$ سم (ب) $5 - 3\sqrt{5}$ سم

(ج) $5 + 5\sqrt{3}$ سم (د) $5 + 3\sqrt{3}$ سم

(٢١) [MAΘ 1991] يحتاج رجل 9 أيام لإنهاء عمل ويحتاج إبنه 16 يوماً لإنهاء

العمل نفسه. بدأ الرجل وإبنه العمل معاً وبعد 4 أيام توقف الإبن عن العمل وأنهى والده العمل بمفرده. ما عدد الأيام الكلي الذي عمل بها الرجل لإنجاز العمل ؟

(أ) $2\frac{3}{4}$ (ب) $4\frac{3}{4}$ (ج) $6\frac{3}{4}$ (د) $8\frac{3}{4}$

(٢٢) [AHSME 1988] ما قيمة c التي تجعل المساواة $(x+2)(x+b)=x^2+cx+6$ محققة ؟

(أ) 3 (ب) -2 (ج) 5 (د) -3

(٢٣) اشترى تاجر عدداً من أطباق المائدة بمبلغ 120 ريالاً. باع منها 16طبقاً بربح 4 ريالات للطبق الواحد وباع باقي الأطباق بسعر 6 ريالات للطبق الواحد. إذا كان مجموع مبيعات التاجر منها يساوي 192 ريالاً فما عدد الأطباق التي اشتراها التاجر ؟

(أ) 20 (ب) 22 (ج) 24 (د) 26

(٢٤) [AHSME 1968 , AMC12B 2002] إذا كان $m \neq 0$ و $n \neq 0$ هما جذري المعادلة $x^2+mx+n=0$ فإن مجموع الجذران هو:

(أ) $-\frac{1}{2}$ (ب) -1 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 1

(٢٥) غادر أحمد المدينة A قاصداً المدينة B التي تبعد مسافة 15 كم عن المدينة A راكباً دراجته بسرعة منتظمة مقدارها x كم في الساعة. إذا زاد أحمد سرعته بمقدار 4 كم في الساعة فإنه سيصل المدينة B قبل الموعد المحدد بنصف ساعة. ما سرعة أحمد الأصلية ؟

(أ) $2\sqrt{31}-2$ كم في الساعة (ب) $2\sqrt{31}+2$ كم في الساعة

(ج) $4\sqrt{31}-2$ كم في الساعة (د) $3\sqrt{31}+2$ كم في الساعة

(٢٦) [AHSME 1970] لنفرض أن p و q عددان موجبان. إذا كان الفرق بين جذري المعادلة $x^2+px+q=0$ يساوي 1 فإن p يساوي:

(أ) $\sqrt{4q-1}$ (ب) $q+1$ (ج) $\sqrt{4q+1}$ (د) $q-1$

(٢٧) [AMC12 2000] لنفرض أن $f\left(\dfrac{x}{3}\right)=x^2+x+1$. عندئذ، مجموع جذري المعادلة $f(3z)=7$ هو

(أ) $-\dfrac{1}{3}$ (ب) $-\dfrac{1}{9}$ (ج) $\dfrac{5}{9}$ (د) $\dfrac{5}{3}$

(٢٨) ذهبت لينا وباسمة للتسوق معاً. اشترت لينا 2 كغم من اللحم و 6 كغم من السمك ودفعت ثمن مشترياتها 224 ريالاً. أما باسمة فاشترت ضعف كمية اللحم ونصف كمية السمك التي اشترتها لينا ودفعت ثمن مشترياتها 250 ريالاً. ما ثمن كيلو غرام اللحم ؟

(أ) 22 (ب) 46 (ج) 50 (د) 54

(٢٩) اشترى علي خمسة أشمغة من النوع الممتاز واستنتج أنه يستطيع توفير 100 ريال لو أنه اشترى خمسة أشمغة من النوع الجيد عوضاً عن أشمغة النوع الممتاز. أما سعيد فاشترى تسعة أشمغة من النوع الممتاز ووجد أن بإمكانه أن يشتري ثلاثة أشمغة أخرى لو غير رأيه واشترى النوع الجيد. ما ثمن الشماغ من النوع الجيد ؟

(أ) 40 (ب) 60 (ج) 80 (د) 100

(٣٠) [AHSME 1957] إذا كان $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1=0$ فما قيمة $4x$؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) $\frac{5}{4}$ (د) $\frac{4}{5}$

(٣١) [AHSME 1959] إذا كان r و s هما جذري المعادلة $x^2-3x+1=0$ فإن r^2+s^2 هو:

(أ) عدد صحيح موجب (ب) عدد كسري ولكنه غير صحيح

(ج) عدد صحيح موجب أصغر من 4 (د) عدد صحيح موجب أكبر من 9

(٣٢) [MAΘ1990] يستطيع سلطان أن ينجز عملاً بعشرة أيام ولكن بمقدور وليد أن ينجز العمل نفسه بستة عشر يوماً. بعد أن عمل وليد بمفرده لمدة ثلاثة أيام انضم إليه سلطان واشتغلا معاً لإنجاز العمل. ما عدد الأيام التي اشتغلها سلطان ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٣٣) [MAΘ 1990] يملك سعيد 301 ريالاً من فئات الريال، الخمسة ريالات، العشرة ريالات. إذا كان عدد ما يملكه من فئة الريالات يزيد بمقدار 4 عن عدد ما يملكه من فئة العشرة ريالات وعدد ما يملكه من فئة الخمسة ريالات يزيد بمقدار 1 عن عدد ما يملكه من فئة الريالات. ما عدد ما يملكه سعيد من فئة العشرة ريالات ؟

(أ) 17 (ب) 21 (ج) 22 (د) 24

(٣٤) [AHSME 1958] عددان مجموعهما يساوي 10 وحاصل ضربهما يساوي 20. مامجموع مقلوبيهما ؟

(أ) $\frac{1}{10}$ (ب) 10 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 2

(٣٥) ما قيمة a التي تجعل للمعادلتين

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 - x - a = 0$$

جذراً حقيقياً مشتركاً ؟

(أ) -1 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٢,١٢) حلول المسائل

(١) الإجابة هي (ج): المعادلة تكافيء المعادلة

$$4x - 12 = 3 + 2x$$
$$4x - 2x = 3 + 12$$
$$2x = 15$$
$$x = \frac{15}{2}.$$

(٢) الإجابة هي (أ): لنفرض أن x هو عدد الأوراق النقدية ذات فئة الخمسة ريالات. عندئذ، $16 - x$ هو عدد الأوراق النقدية ذات فئة العشرة ريالات. وبما أن مجموع النقود يساوي 105 ريالاً فنرى أن

$$5x + 10(16 - x) = 105$$
$$160 - 5x = 105$$
$$-5x = -55$$
$$x = 11.$$

(٣) الإجابة هي (ب):

$$5 - 4x^2 = 3(2x + 1) + 2$$
$$5 - 4x^2 = 6x + 3 + 2$$
$$-4x^2 - 6x = 0$$
$$-2x(2x + 3) = 0$$

$2x + 3 = 0$ أو $-2x = 0$

إذن، $x_1 = 0$ و $x_2 = -\frac{3}{2}$.

(٤) الإجابة هي (د):

$$x + \frac{2}{x} = 3$$

$$x^2+2=3x$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$
$$x-1=0 \quad \text{أو} \quad x-2=0$$

إذن، $x_1=1$ و $x_2=2$.

(٥) الإجابة هي (ب): باستخدام القانون العام نجد أن

$$\begin{aligned} x &= \frac{15\pm\sqrt{225-4\times5\times2}}{10}=\frac{15\pm\sqrt{225-40}}{10} \\ &= \frac{15\pm\sqrt{185}}{10}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{5\times37}{100}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{37}{20}} \end{aligned}$$

(٦) الإجابة هي (أ):

$$(x+2)(x-1)=2-3x$$
$$x^2+x-2=2-3x$$
$$x^2+4x-4=0$$

الآن باستخدام القانون العام نجد أن

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4\pm\sqrt{16-4\times1\times(-4)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{32}}{2} \\ &= \frac{-4\pm4\sqrt{2}}{2}=-2\pm2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(٧) الإجابة هي (أ):

$$\frac{x-1}{2-x}=2x+1$$
$$(2x+1)(2-x)=x-1$$
$$4x-2x^2+2-x=x-1$$
$$-2x^2+2x+3=0$$
$$2x^2-2x-3=0$$

الآن باستخدام القانون العام نجد أن

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$$
$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

(٨) الإجابة هي (أ): بحساب المميز نجد أن $\Delta = 16 - 4m$.

ولكي يكون جذرا المعادلة مكرران فيجب أن يكون $\Delta = 0$. أي أن $16 - 4m = 0$. وبهذا يكون $m = 4$.

(٩) الإجابة هي (ب): لدينا $\alpha + 2\alpha = \frac{6}{a}$ و $\alpha(2\alpha) = \frac{a-2}{a}$

أي أن
$$\alpha = \frac{2}{a} \qquad (١)$$
$$2\alpha^2 = \frac{a-2}{a} \qquad (٢)$$

بالتعويض عن قيمة α في المعادلة الثانية نرى أن

$$2\left(\frac{4}{a^2}\right) = \frac{a-2}{a}$$
$$\frac{8}{a} = a - 2$$
$$a^2 - 2a = 8$$
$$a^2 - 2a - 8 = 0$$
$$(a-4)(a+2) = 0$$
$$a - 4 = 0 \quad \text{أو} \quad a + 2 = 0$$

إذن، $a = 4$ أو $a = -2$.

(١٠) الإجابة هي (ب): لنفرض أن x متر هو عرض كل من أوراق الجدران المستخدمة لتغطية الجدار. عندئذ، عدد الأوراق التي نحتاجها لتغطية الجدار

هو $\frac{12}{x}$. الآن، إذا كان عرض كل من أوراق الجدران يساوي $x+\frac{1}{5}$ لكان العدد الذي نحتاجه لتغطية الجدار يساوي $\frac{12}{x}-2$. إذن،

$$\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{12}{x}-2\right)=12$$
$$12-2x+\frac{12}{5x}-\frac{2}{5}=12$$
$$-2x+\frac{12}{5x}-\frac{2}{5}=0$$
$$-10x^2+12-2x=0$$
$$5x^2+x-6=0$$
$$(5x+6)(x-1)=0$$

إذن، $x=1$ أو $x=-\frac{6}{5}$. وبما أن $x>0$ فنجد أن $x=1$.

(١١) الإجابة هي (أ): لنفرض أن عدد الرجال الذين اتفقوا على القيام بالرحلة هو x. إذن، المفروض أن يدفع كل منهم $\frac{1600}{x}$ ريالاً. وبعد تخلف 8 منهم تحتم على كل من باقي الرجال وعددهم $x-8$ أن يدفع $\frac{1600}{x}+10$ لتغطية النقص. إذن،

$$(x-8)\left(\frac{1600}{x}+10\right)=1600$$
$$(x-8)\left(\frac{1600+10x}{x}\right)=1600$$
$$(x-8)(1600+10x)=1600x$$
$$1600x+10x^2-12800-80x=1600x$$
$$10x^2-80x-12800=0$$
$$x^2-8x-1280=0$$

باستخدام القانون العام لحل المعادلة نجد أن

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(-1280)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{5184}}{2} = \frac{8 \pm 72}{2}$$

إذن، $x = \frac{8 + 72}{2} = 40$. وهذا يكون عدد الرجال الذين أكملوا الرحلة هو $x - 8 = 32$.

(١٢) الإجابة هي (د): لنفرض أن طول المستطيل هو x وعرضه هو y. عندئذ،

$$x + y = 10$$
$$xy = 30$$

من المعادلة الأولى نرى أن $y = 10 - x$. وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على

$$x(10 - x) = 30$$
$$10x - x^2 = 30$$
$$x^2 - 10x + 30 = 0$$

مميز المعادلة هو $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 120 = -20$ وهذا عدد سالب. إذن، لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

(١٣) الإجابة هي (ج): لنفرض أن العدد الأصغر هو x. عندئذ، يكون العدد الأكبر هو $x + 2$. من ذلك نجد

$$x(x + 2) = 360$$
$$x^2 + 2x - 360 = 0$$
$$(x + 20)(x - 18) = 0$$
$$x = -20 \quad \text{أو} \quad x = 18$$

بما أن x موجب فنرى أن $x = 18$. ومن ثم $x + 2 = 20$. ويكون مجموع العددين هو 38.

(١٤) الإجابة هي (أ) : نقاط التقاطع تتحقق عندما يكون

$$x^2 + x - 5 = 3x + c$$
$$x^2 - 2x - (c+5) = 0$$

مميز المعادلة هو $\Delta = 4 + 4(c+5) = 24 + 4c$. ولكي يكون هناك نقطتا تقاطع مختلفتان فيجب أن يكون $\Delta > 0$. أي أن $c > -6$. ولذا فالإجابة الصحيحة هي (أ).

(١٥) الإجابة هي (ج): بما أن α و β جذرا المعادلة $2x^2 - 3x - 4 = 0$ فإن $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ و $\alpha\beta = -2$.

المعادلة التي جذراها هما $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هي

$$a\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) = 0 \quad \text{حيث } a \neq 0$$
$$\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) = 0$$
$$\left(\frac{\alpha x - 1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta x - 1}{\beta}\right) = 0$$
$$(\alpha x - 1)(\beta x - 1) = 0$$
$$\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 = 0$$
$$-2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$$
$$4x^2 + 3x - 2 = 0 \,.$$

(١٦) الإجابة هي (ب): لنفرض أن طول ضلع القائمة الأطول يساوي x سم. عندئذ، يكون طول ضلع القائمة الأصغر يساوي $x - 7$ وطول الوتر يساوي $x + 2$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= x^2+(x-7)^2\\ x^2+4x+4 &= x^2+x^2-14x+49\\ x^2-18x+45 &= 0\\ (x-3)(x-15) &= 0\end{aligned}$$

إذن، $x = 3$ أو $x = 15$.

إذا كان $x = 3$ فيكون $x - 7 = -4$ وهذا مرفوض. إذن، $x = 15$ ويكون طول الوتر $x + 2 = 17$.

(١٧) الإجابة هي (د):

$$\begin{aligned}x &= 1+\frac{1}{y}\\ xy &= y+1\end{aligned}$$

أيضاً،

$$\begin{aligned}y &= 1+\frac{1}{x}\\ xy &= 1+x\end{aligned}$$

إذن، $y + 1 = 1 + x$ ومن ذلك نجد أن $y = x$.

(١٨) الإجابة هي (د): نفرض أن العدد الأصغر هو x. عندئذ يكون العدد الأكبر هو $2x + 3$. الآن،

$$\begin{aligned}x+2x+3 &= 66\\ 3x &= 63\\ x &= 21\end{aligned}$$

إذن، العدد الأكبر هو $2x + 3 = 2(21) + 3 = 45$.

(١٩) الإجابة هي (ج): بإضافة $\frac{7}{x-3}$ للطرفين نحصل على $x = 3$. ولكن كل من الطرفين غير معرف عند $x = 3$. إذن، لا توجد قيم تحقق المعادلة.

(٢٠) الإجابة هي (أ): نفرض أن عرض المستطيل $ABCD$ هو x. عندئذ، طول المستطيل $ABCD$ هو $2x+3$ و عرض المستطيل $PQRS$ هو $x+2$.

طول المستطيل $PQRS$ هو $3(x+2)+4=3x+10$. الآن،

$$(x+2)(3x+10)=2x(2x+3)$$
$$3x^2+16x+20=4x^2+6x$$
$$x^2-10x-20=0$$

وباستخدام القانون العام نجد أن

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100+80}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{180}}{2}$$
$$=\frac{10\pm 6\sqrt{5}}{2}=5\pm 3\sqrt{5}$$

ولكن $5-3\sqrt{5}$ عدد سالب. إذن، عرض المستطيل $ABCD$ هو $x=5+3\sqrt{5}$.

(٢١) الإجابة هي (ج): عند عمل الإبن والأب معاً فإهما ينجزان جزءاً من العمل يساوي $\frac{1}{9}+\frac{1}{16}=\frac{25}{144}$ في اليوم الواحد. ولذا يكون مقدار ما أنجزاه معاً في أربعة أيام يساوي $4\left(\frac{25}{144}\right)=\frac{25}{36}$. ولهذا يكون على الأب إنجاز الجزء $\frac{11}{36}$ من العمل بمفرده. لنفرض أن x هو عدد الأيام التي عمل فيها الأب بمفرده. عندئذ،

$$x\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{11}{36}$$
$$36x=99$$

$$x = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$$

إذن، عدد أيام عمل الأب الكلي يساوي $4 + 2\frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}$.

(٢٢) الإجابة هي (ج): جذرا المعادلة $(x+2)(x+b) = 0$ هما $x_1 = -2$ و $x_2 = -b$. وهذان هما جذرا المعادلة $x^2 + cx + 6 = 0$. إذن، $x_1 x_2 = 2b = 6$ ونجد أن $b = 3$. كذلك،

$$x_1 + x_2 = -2 - b = -c$$
$$-2 - 3 = -c$$
$$c = 5 .$$

(٢٣) الإجابة هي (ج): لنفرض أن x هو عدد الأطباق التي اشتراها التاجر.

عندئذ، مجموع المبيعات هو $16(\frac{120}{x} + 4) \times 6(x - 16)$. إذن،

$$16\left(\frac{120}{x} + 4\right) + 6(x - 16) = 192$$
$$3x^2 - 112x + 960 = 0$$

$$x = \frac{112 \pm \sqrt{112^2 - 4(3)(960)}}{6} = \frac{112 \pm \sqrt{1024}}{6} = \frac{112 \pm 32}{6}$$

إذن، $x_1 = \frac{112 + 32}{6} = 24$ و $x_2 = \frac{112 - 32}{6} = 13.3$.

x_2 مرفوض لأن عدد الأطباق يجب أن يكون عدداً صحيحاً. ولذا فإن $x = 24$.

(٢٤) الإجابة هي (ب): لدينا

$$mn = n$$
$$m + n = -m$$

من ذلك نرى أن $m = 1$ و $n = -2m = -2$. إذن،

. $m+n=1-2=-1$

(٢٥) الإجابة هي (أ): الزمن اللازم لإنهاء الرحلة بسرعة x كم في الساعة يساوي $\frac{15}{x}$ ساعة. الزمن الازم لإنهاء الرحلة بعد زيادة السرعة يساوي $\frac{15}{x+4}$ ساعة. إذن،

$$\frac{15}{x}-\frac{15}{x+4}=\frac{1}{2}$$
$$15(x+4)-15x=\frac{1}{2}x(x+4)$$
$$15x+60-15x=\frac{x^2+4x}{2}$$
$$x^2+4x-120=0$$
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{496}}{2}=\frac{-4\pm4\sqrt{31}}{2}=-2\pm2\sqrt{31}$$

إذن، سرعة أحمد الأصلية هي $x=-2+2\sqrt{31}$ كم في الساعة.

(٢٦) الإجابة هي (ج): لنفرض أن α أحد جذري المعادلة. عندئذ، $\alpha+1$ هو الجذر الآخر.الآن،

$2\alpha+1=-p$ و $\alpha(\alpha+1)=q$. من ذلك نرى أن

$$\alpha=\frac{-1-p}{2}$$
$$\alpha+1=\frac{-1-p}{2}+1=\frac{1-p}{2}\ .$$

وبهذا يكون

$$q=\alpha(\alpha+1)=\left(\frac{-1-p}{2}\right)\left(\frac{1-p}{2}\right)=\frac{p^2-1}{4}$$

إذن، $p^2=4q+1$ ويكون $p=\sqrt{4q+1}$.

(٢٧) الإجابة هي (ب): لنفرض أن $y = \frac{x}{3}$. عندئذ،

$$f(y) = (3y)^2 + 3y + 1 = 9y^2 + 3y + 1 \; .$$

وبهذا يكون

$$\begin{aligned} f(3z) = 81z^2 + 9z + 1 &= 7 \\ 81z^2 + 9z + 1 &= 7 \\ 81z^2 + 9z - 6 &= 0 \\ 27z^2 + 3z - 2 &= 0 \\ (9z-2)(3z+1) &= 0 \end{aligned}$$

وبهذا فإن $z_1 = -\frac{1}{3}$ و $z_2 = \frac{2}{9}$. إذن،

$$z_1 + z_2 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = -\frac{1}{9} \; .$$

(٢٨) الإجابة هي (ب): لنفرض أن ثمن كيلو غرام اللحم هو x ريالاً وثمن كيلوغرام السمك هو y ريالاً. إذن، من معلومات المسألة نحصل على النظام

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 224 \\ 4x + 3y &= 250 \end{aligned}$$

بضرب المعادلة الثانية بالعدد -2 وإضافة الناتج إلى المعادلة الأولى نحصل على

$$\begin{aligned} -6x &= -276 \\ x &= \frac{-276}{-6} = 46 \; . \end{aligned}$$

(٢٩) الإجابة هي (ب): لنفرض أن x ثمن الشماغ الواحد من النوع الممتاز وأن y ثمن الشماغ الواحد من النوع الجيد. من معلومات المسألة نحصل على

النظام

$$5x - 5y = 100 \quad (١)$$

$$9x - 12y = 0 \quad (٢)$$

بضرب المعادلة (١) بالعدد 9– والمعادلة (٢) بالعدد 5 نحصل على النظام المكافئ

$$-45x + 45y = -900 \quad (٣)$$

$$45x - 60y = 0 \quad (٤)$$

بجمع المعادلتين (٣) و (٤) نجد أن

$$-15y = -900$$

$$y = \frac{-900}{-15} = 60$$ ريال.

(٣٠) الإجابة هي (ب):

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} + 1 = 0$$
$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x+1} - 1$$
$$(x-1) = (x+1) - 2\sqrt{x+1} + 1$$
$$x - 1 - x - 1 - 1 = -2\sqrt{x+1}$$
$$-3 = -2\sqrt{x+1}$$
$$9 = 4(x+1)$$
$$9 = 4x + 4$$
$$4x = 9 - 4 = 5 \,.$$

(٣١) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$rs = 1$ و $r + s = 3$. من ذلك نرى أن

$$r^2 + s^2 = r^2 + 2rs + s^2 - 2rs = (r+s)^2 - 2rs = 3^2 - 2(1) = 7$$

إذن، الإجابة (أ) هي الصائبة.

(٣٢) الإجابة هي (ج): ما أنجزه وليد في ثلاثة أيام يساوي $\frac{3}{16}$ من العمل. بعد انضمام سلطان يكون بمقدور الإثنين معاً أن ينجزا $\frac{26}{160} = \frac{1}{16} + \frac{1}{10}$ من العمل في يوم واحد. لنفرض أن x عدد الأيام التي اشتغلها سلطان. عندئذ،

$$x\left(\frac{26}{160}\right) = \frac{13}{16}$$

$$. \; x = \frac{(13)(160)}{(16)(26)} = 5$$

(٣٣) الإجابة هي (أ): لنفرض أن عدد فئة العشرة ريالات التي يملكها سعيد هو x . عندئذ، عدد فئات الريال هو $x + 4$ وعدد فئات الخمسة ريالات هو $x + 4 + 1 = x + 5$.إذن،

$$10x + (x + 4) + 5(x + 5) = 301$$
$$16x + 29 = 301$$
$$16x = 301 - 29 = 272$$
$$. \; x = \frac{272}{16} = 17$$

(٣٤) الإجابة هي (ج): لنفرض أن العددين هما x و y. عندئذ، $x + y = 10$ و $xy = 20$. الآن،

$$. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

(٣٥) الإجابة هي (ج): لكي تشترك المعادلتين في جذر فيجب أن يكون

$$x^2 + ax + 1 = x^2 - x - a$$
$$ax + x + a + 1 = 0$$
$$x(a+1) + (a+1) = 0$$
$$(x+1)(a+1) = 0$$

إذن، $x = -1$ أو $a = -1$.

إذا كان $a = -1$ فإن $x^2 - x + 1 = 0$. وهذه المعادلة ليس لها جذور حقيقية لأن مميزها

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 .$$

أما إذا كان $x = -1$ فإن

$$a = x^2 - x = (-1)^2 - (-1) = 2 .$$

حينئذ،تكون المعادلة الأولى

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x = -1$$

وتكون المعادلة الثانية

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2 \qquad \text{أو} \qquad x = -1$$

وبهذا فالحل المشترك هو $x = -1$.

(٢.١٣) مسائل غير محلولة

(١) قيمة x التي تحقق المعادلة $2x - 19 = 6(x-2)$ هي

(أ) $-\frac{7}{4}$ (ب) $\frac{7}{4}$ (ج) $-\frac{4}{7}$ (د) $\frac{4}{7}$

(٢) ما قيمة x بدلالة a و b التي تحقق المعادلة $a = \frac{ax-b}{b(a-bx)}$ ؟

(أ) $\frac{b(a^2-1)}{a(b^2+1)}$ (ب) $\frac{b(a^2+1)}{a(b^2+1)}$

(ج) $\frac{b^2(a+1)}{a(b^2+1)}$ (د) $\frac{b^2(a+1)}{a(b^2-1)}$

(٣) ما قيمة y التي تحقق المعادلة $10y - (21-y) = 1$ ؟

(أ) 2 (ب) -2 (ج) 1 (د) -1

(٤) [AHSME 1957] إذا كان $x : y : z$ هو $2 : 3 : 5$ وكان مجموع الثلاثة أعداد x، y، z يساوي 100 وكان $y = ax - 10$ فما قيمة a ؟

(أ) 2 (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) 3 (د) $\frac{5}{2}$

(٥) [AHSME 1956] صرح مهندس بأنه يستطيع إنجاز العمل المكلف به في ثلاثة أيام باستخدام الآلات المتوفرة لديه وأنه إذا أضيفت ثلاثة آلات أخرى فإنه يستطيع إنجاز العمل في يومين. على افتراض أن جميع الآلات تعمل بالكفاءة نفسها فما عدد الأيام اللازمة لإنجاز العمل باستخدام آلة واحدة فقط ؟

(أ) 16 (ب) 17 (ج) 18 (د) 19

(٦) [AHSME 1954] حلول المعادلة

$$\frac{2x^2}{x-1}-\frac{2x+7}{3}+\frac{4-6x}{x-1}+1=0$$ هي:

(أ) 1 و 4 (ب) 1 فقط (ج) 4 فقط (د) 1− و 4−

(٧) [AHSME 1955] القيم التي تحقق المعادلة $\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-1}$ هي:

(أ) $x=0$ فقط (ب) $x=1$ و $x=2$

(ج) $x=1$ (د) $x=2$ فقط

(٨) [AHSME 1956] قيم x التي تحقق المعادلة

$3y^2+y+4=2(6x^2+y+2)$ عندما يكون $y=2x$ هي:

(أ) جميع قيم x الحقيقية (ب) $x=0$ فقط

(ج) جميع قيم x الصحيحة (د) لا توجد قيم لـ x

(٩) [AHSME 1955] إذا كانت a، b، c أعداداً حقيقية تحقق $\sqrt{a+\frac{b}{c}}=a\sqrt{\frac{b}{c}}$ فما قيمة c بدلالة a و b ؟

(أ) $\frac{a\left(b^2-1\right)}{b}$ (ب) $\frac{b\left(a^2-1\right)}{a}$

(ج) $\frac{b^2\left(a-1\right)}{a}$ (د) $\frac{a^2\left(b-1\right)}{b}$

(١٠) [AHSME 1958] ما قيمة x التي تحقق المعادلة $x^2+b^2=(a-x)^2$ ؟

(أ) $\frac{a^2+b^2}{2a}$ (ب) $\frac{b^2-a^2}{2a}$ (ج) $\frac{a^2-b^2}{2}$ (د) $\frac{a^2-b^2}{2a}$

(١١) [AHSME 1966] ما عدد القيم x التي تحقق المعادلة

$$\frac{2x^2-10x}{x^2-5x}=x-3 \text{ ؟}$$

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١٢) [MAΘ 1992] ما قيمة x إذا كان 1 مطروحاً منه مقلوب $x-1$ يساوي مقلوب $x-1$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) -1

(١٣) [MAΘ 1990] ما العدد الأكبر لعددين صحيحين فرديين متتاليين بحيث يكون ثلث العدد الأصغر مضافاً إليه ضعف العدد الأكبر يزيد بمقدار 7 عن مجموع العددين؟

(أ) 13 (ب) 15 (ج) 17 (د) 19

(١٤) [AHSME 1960] إذا كان a و b عددين حقيقين فيكون للمعادلة $3x-5+a=bx+1$ حل عندما:

(أ) $a\neq 2b$ (ب) $a\neq 6$ (ج) $b\neq 0$ (د) $b\neq 3$

(١٥) الفرق بين الجذر الأكبر والجذر الأصغر للمعادلة $2x^2-13x=7$ هو:

(أ) $\frac{13}{2}$ (ب) $-\frac{13}{2}$ (ج) $\frac{15}{2}$ (د) $-\frac{15}{2}$

(١٦) جذرا المعادلة $3x+\frac{2}{x}=-7$ هما

(أ) $-\frac{1}{3}$ و -2 (ب) $-\frac{1}{3}$ و 2 (ج) $\frac{1}{3}$ و -2 (د) $\frac{1}{3}$ و 2

(١٧) [AMC12A 2005] توجد قيمتان للعدد a بحيث يكون للمعادلة $4x^2+ax+8x+9=0$ حل واحد. ما مجموع هاتين القيمتين ؟

(أ) 8 (ب) 20 (ج) -8 (د) -16

(١٨) [AHSME 1951] إذا كان جذرا المعادلة

$$\frac{x(x-1)-(m+1)}{(x-1)(m-1)}=\frac{x}{m}$$

متساويين فما قيمة m ؟

(أ) 1 (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) -1

(١٩) إذا كان r و s جذري المعادلة $2x^2+3x-6=0$ فإن $\left|r-s\right|$ يساوي:

(أ) $\sqrt{57}$ (ب) 0 (ج) $\frac{\sqrt{57}}{2}$ (د) $\frac{3}{2}$

(٢٠) مجموع قيم k التي تجعل للمعادلة $(k+1)x^2+kx+k=0$ جذراً واحداً مكرراً هو

(أ) 0 (ب) $-\frac{4}{3}$ (ج) $\frac{4}{3}$ (د) $-\frac{3}{4}$

(٢١) إذا كان أحد جذري المعادلة $kx^2+(k-8)x+(1-k)=0$ يزيد بمقدار 2 عن الجذر الآخر فما قيم k الممكنة ؟

(أ) $k=4$ و $k=16$ (ب) $k=4$ فقط

(ج) $k=16$ فقط (د) $k=-4$ و $k=-16$

(٢٢) ما قيمة k التي تجعل للمعادلتين $y=3x+k$ و $y=x^2+x-5$ حلاً مشتركاً واحداً فقط ؟

(أ) $k=4$ (ب) $k=-4$ (ج) $k=6$ (د) $k=-6$

(٢٣) [AHSME 1955] لكل من المعادلات:

$3x^2 - 2 = 25$ ، $(2x-1)^2 = (x-1)^2$ ، $\sqrt{x^2 - 7} = \sqrt{x-1}$

(أ) جذران صحيحان

(ب) لا توجد جذور لأي منها أكبر من 3

(ج) لكل منها جذر موجب وجذر سالب

(د) لكل منها جذر واحد فقط

(٢٤) [AHSME 1955] إذا كان r و s جذري المعادلة $x^2 - px + q = 0$ فما قيمة $r^2 + s^2$ ؟

(أ) $p^2 + 2q$ (ب) $p^2 - 2q$ (ج) $q^2 - 2p$ (د) $q^2 - 2p$

(٢٥) [AHSME 1955] عددان مجموعهما يساوي 6 والقيمة المطلقة للفرق بينهما تساوي 8 . المعادلة التي جذراها هذان العددان هي:

(أ) $x^2 - 6x + 7 = 0$ (ب) $x^2 - 6x - 7 = 0$

(ج) $x^2 + 6x - 7 = 0$ (د) $x^2 + 6x - 8 = 0$

(٢٦) [AHSME 1954] ما قيم k التي تجعل جذري المعادلة $2x^2 - kx + x + 8 = 0$ متساويين ؟

(أ) -7 و 9 (ب) -7 فقط (ج) 7 و 9 (د) 9 فقط

(٢٧) [AMC12A 2002] إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 63x + k = 0$ عددين أوليين فما عدد القيم الممكنة لـــ k ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 4

(٢٨) إذا كان α و β جذري المعادلة $2x^2 - 3x = 4$ فإن المعادلة التي جذراها $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هي:

(أ) $4x^2 + 3x - 3 = 0$ (ب) $4x^2 - 3x - 3 = 0$

(ج) $4x^2 - 3x + 2 = 0$ (د) $4x^2 + 3x - 2 = 0$

(٢٩) إذا كان m و n جذري المعادلة $3x^2 - 2x - 2 = 0$ فإن المعادلة التي جذراها $m - \frac{1}{n}$ و $n - \frac{1}{m}$ هي:

(أ) $6x^2 - 10x - 25 = 0$ (ب) $6x^2 + 10x - 25 = 0$

(ج) $6x^2 + 10x + 25 = 0$ (د) $6x^2 - 10x + 25 = 0$

(٣٠) إذا كان α و β جذري المعادلة $4x^2 - 3x - 3 = 0$ فإن المعادلة التي جذراها α^3 و β^3 هي:

(أ) $64x^2 + 135x - 27 = 0$ (ب) $64x^2 - 135x + 27 = 0$

(ج) $64x^2 - 135x - 27 = 0$ (د) $64x^2 + 135x + 27 = 0$

(٣١) [AMC12B 2005] إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + mx + n = 0$ هما ضعف جذري المعادلة $x^2 + px + m = 0$ حيث $m \neq 0$ ، $n \neq 0$ ، $p \neq 0$ فإن قيمة $\frac{n}{p}$ تساوي:

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 4 (د) 8

(٣٢) [AHSME 1954]إذا كان أحد جذري المعادلة $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ هو 1 فما الجذر الآخر ؟

(أ) $\frac{b(c-a)}{a(b-c)}$ (ب) $\frac{a(b-c)}{c(a-b)}$

(ج) $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$ (د) $\frac{c(a-b)}{b(c-a)}$

(٣٣) [AHSME 1956] يكون أحد جذري المعادلة $ax^2+bx+c=0$ مقلوباً للجذر الآخر عندما:

(أ) $a=b$ (ب) $a=bc$ (ج) $c=a$ (د) $c=b$

(٣٤) [AHSME 1956] القيمة المطلقة للفرق بين جذري المعادلة $\frac{15}{x^2-4}-\frac{2}{x-1}=0$ هي:

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6.5 (د) 7.5

(٣٥) [AHSME 1957] مجموع جذري المعادلة $2x^2-hx+2k=0$ يساوي 4 وحاصل ضربهما يساوي 3−. ما قيمة كل من h و k ؟

(أ) $h=8$ و $k=3$ (ب) $h=8$ و $k=-3$

(ج) $h=-8$ و $k=3$ (د) $h=-8$ و $k=-3$

(٣٦) [AHSME 1958] لنفرض أن أحد جذري المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هو ضعف الجذر الآخر. ما العلاقة بين المعاملات a، b، c ؟

(أ) $4b^2=9c$ (ب) $2b^2=9ac$

(ج) $2b^2=9a$ (د) $b^2=8ac$

(٣٧) [AHSME 1985] لنفرض أن جذري المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هما r و s. إذا كان جذرا المعادلة $x^2+px+q=0$ هما r^2 و s^2 فما قيمة p ؟

(أ) $\frac{b^2-4ac}{a^2}$ (ب) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (ج) $\frac{2ac-b^2}{a^2}$ (د) $\frac{b^2-2c^2}{a^2}$

(٣٨) [AHSME 1959] إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + bx + c = 0$ حقيقيين وكل منهما أكبر من 1 وإذا كان $s = b + c + 1$ فإن s :

(أ) يمكن أن يساوي صفراً (ب) يجب أن يكون أكبر من الصفر

(ج) يجب أن يكون أصغر من الصفر (د) يقع بين العددين -1 و 1.

(٣٩) [AHSME 1960] إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 - 3kx + 2k^2 - 1 = 0$ يساوي 7 فإن الجذرين:

(أ) عددان صحيحان موجبان (ب) عددان صحيحان سالبان

(ج) عددان كسريان (د) عددان غير كسرين

(٤٠) [AHSME 1952] إذا كان جذرا المعادلة $\dfrac{x^2 - bx}{ax - c} = \dfrac{m-1}{m+1}$ متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة فإن قيمة m تساوي:

(أ) $\dfrac{a-b}{a+b}$ (ب) $\dfrac{a+b}{a-b}$ (ج) $\dfrac{1}{c}$ (د) 1

(٤١) حقل على شكل مستطيل طوله 52 متراً وعرضه 35 متراً يوجد ممر حول الحقل مساحته 558 متراً مربعاً. ما عرض الممر ؟

(أ) 3 متر (ب) 5 متر (ج) 6 متر (د) 7 متر

(٤٢) عمر سيدة الآن خمسة أمثال عمر إبنتها. وقبل عامين كان مجموع مربعي عمريهما يساوي 1114 عاماً ما عمر الإبنة الآن ؟

(أ) 35 (ب) 21 (ج) 14 (د) 7

(٤٣) [AHSME 1952] إذا كان p هو محيط مستطيل وكان d هو قطره فما الفرق بين طول وعرض المستطيل ؟

(أ) $\frac{\sqrt{8d^2+p^2}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{8d^2-p^2}}{2}$

(ج) $\frac{\sqrt{8d^2+p^2}}{4}$ (د) $\frac{\sqrt{8d^2-p^2}}{4}$

(٤٤) [AHSME 1953] أثناء محاولة حل مسألة تؤدي إلى معادلة من الدرجة الثانية، ارتكب أحد الطلاب خطأ في الحد الثابت للمعادلة فقط وحصل على الجذرين 2 و 8. وارتكب طالب آخر خطأ في معامل x فقط وحصل على الجذرين -1 و -9. ما معادلة الدرجة الثانية الصحيحة ؟

(أ) $x^2-10x+9=0$ (ب) $x^2+10x+9=0$

(ج) $x^2-10x+16=0$ (د) $x^2-8x-9=0$

(٤٥) مجموع عدد ومقلوبه يساوي $\frac{61}{30}$. ما القيم الممكنة للعدد ؟

(أ) $\frac{5}{6}$ و $\frac{6}{5}$ (ب) 3 و $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{7}{6}$ و $\frac{6}{7}$

(٤٦) نحتاج إلى عدد y من أباريق الماء التي سعة كل منها يساوي x ملليتر لملئ خزان من الماء. إذا استبدلنا الأباريق بأخرى سعة كل منها يزيد بمقدار 400 ملليتر فسنحتاج إلى عدد من الأباريق أقل من العدد الأصلي بمقدار 8 لملئ الخزان. أما إذا استخدمنا أباريق سعة كل منها يقل عن سعة الإبريق الأصلي بمقدار 200ميلليتر فسوف يزيد عدد الأباريق التي نحتاجها لملئ الخزان عن العدد الأصلي بمقدار 10 أباريق. ما سعة خزان الماء باللترات ؟

(أ) 8 لتر (ب) 10 لتر (ج) 12 لتر (د) 14 لتر

(٢.١٤) اجابات المسائل غير المحلولة

(١) أ	(٢) ب	(٣) أ	(٤) أ	(٥) ج
(٦) ج	(٧) أ	(٨) ب	(٩) ب	(١٠) د
(١١) أ	(١٢) د	(١٣) ج	(١٤) د	(١٥) ج
(١٦) أ	(١٧) د	(١٨) ج	(١٩) ج	(٢٠) ب
(٢١) أ	(٢٢) د	(٢٣) ب	(٢٤) ب	(٢٥) ب
(٢٦) أ	(٢٧) ب	(٢٨) د	(٢٩) أ	(٣٠) ج
(٣١) د	(٣٢) ج	(٣٣) ج	(٣٤) ج	(٣٥) ب
(٣٦) ب	(٣٧) ج	(٣٨) ب	(٣٩) د	(٤٠) أ
(٤١) أ	(٤٢) د	(٤٣) ب	(٤٤) أ	(٤٥) أ
(٤٦) ج				

الفصل الثالث

المتباينات
Inequalities

(٣.١) ترميز [Notations]

درسنا في الفصل الثاني المعادلات الخطية في متغير واحد، مثل، $2 = x + 3$ و $2 = 3x$. قيمة x التي تحقق المعادلة الأولى هي $x = -1$ وقيمة x التي تحقق المعادلة الثانية هي $x = \frac{2}{3}$. لكن ماذا لو أردنا إيجاد جميع قيم x التي تحقق $2 > x + 3$ أو $2 \leq x + 3$أو $2 \leq 3x$ ؟ كل من هذه الصيغ تسمى متباينة خطية في متغير واحد. ونستخدم الرموز $>$ ، $<$ ، $\leq$ ، $\geq$ للتعبير عن المتباينة وتقرأ هذه الرموز على النحو التالي:

الرمز	المعنى	أمثلة
$x > y$	x أكبر من y	$4 > 3$، $-5 > -7$، $2\frac{1}{2} > 2$
$x < y$	x أصغر من y	$3 < 4$، $-7 < -5$، $2 < 2\frac{1}{2}$
$x \geq y$	x أكبر من أو تساوي y	$4 \geq 3$، $4 \geq 4$، $-2 \geq -3$
$x \leq y$	x أصغر من أو تساوي y	$3 \leq 4$ ، $4 \leq 4$ ، $-3 \leq -2$

(٣.٢) حل المتباينات [Solving Inequalities]

المتباينات المتكافئة هي المتباينات التي لها نفس مجموعة الحل. أي أن المتباينات المتكافئة هي المتباينات التي تحقق نفس القيم. يمكن تحويل متباينة إلى متباينة مكافئة لها باستخدام واحدة أو أكثر من القواعد التالية:

(١) اضافة العدد نفسه إلى طرفي المتباينة.

(٢) طرح العدد نفسه من طرفي المتباينة.

(٣) ضرب طرفي المتباينة بعدد موجب.

(٤) قسمة طرفي المتباينة على عدد موجب.

(٥) ضرب طرفي المتباينة بعدد سالب وتغيير إشارة المتباينة من $>$ إلى $<$ (أو $\leq$ إلى $\geq$).

(٦) قسمة طرفي المتباينة على عدد سالب وتغيير إشارة المتباينة من $>$ إلى $<$ (أو $\leq$ إلى $\geq$).

يمكن التعبير عن هذه القواعد باستخدام الرموز على النحو التالي:

(١) إذا كان $a < b$ فإن $a + c < b + c$.

(٢) إذا كان $a < b$ فإن $a - c < b - c$.

(٣) إذا كان $a < b$ وكان $c > 0$ فإن $ac < bc$.

(٤) إذا كان $a < b$ وكان $c > 0$ فإن $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

(٥) إذا كان $a < b$ وكان $c < 0$ فإن $ac > bc$.

(٦) إذا كان $a < b$ وكان $c < 0$ فإن $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

إحدى الخصائص الأخرى المهمة للمتباينات هي خاصية التعدي والتي تنص على

(٧) إذا كان $a < b$ و $b < c$ فإن $a < c$.

مثال (١) إذا كان $a < b$ وكان العددان موجبين معاً أو سالبين معاً فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

الحل

لنفرض أن $c = \frac{1}{ab}$. عندئذ، $c > 0$. وبهذا نجد أن

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a \times c < b \times c \\ &\Rightarrow a \times \frac{1}{ab} < b \times \frac{1}{ab} \\ &\Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \end{aligned}$$

◇

أحيانا يمكن استخدام خط الأعداد الحقيقية للتعبير عن مجموعة حل المتباينة، فمثلاً



يعني أن $a < x < b$ وأن

a b

يعني أن $a \le x \le b$ وهكذا.

(لاحظ أن $a < x < b$ يعني أن $a < x$ و $x < b$).

مثال (٢) جد مجموعة حل المتباينة $3x + 4 > 5x - 1$.

الحل

$$\begin{aligned}3x+4>5x-1 &\Leftrightarrow 4>2x-1\\ &\Leftrightarrow 5>2x\\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2}>x\end{aligned}$$

إذن، مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية التي أصغر من $\frac{5}{2}$. ◇

مثال (٣) جد مجموعة حل المتباينة $x-7\le 2x+3<x+7$.

الحل

لدينا هنا في الواقع متباينتان هما

$2x+3<x+7$ و $x-7\le 2x+3$. الآن،

$$2x+3<x+7 \Leftrightarrow x+3<7 \Leftrightarrow x<4$$

أيضاً

$$x-7\le 2x+3 \Leftrightarrow -7\le x+3 \Leftrightarrow -10\le x$$

إذن، مجموعة الحل هي $-10\le x<4$. ◇

مثال (٤) حل المتباينة $\frac{1}{x-3}\le 2$.

الحل

قد يبدو للوهلة الأولى أن بالإمكان الحصول على الحل كما يلي:

$$\frac{1}{x-3}\le 2 \Leftrightarrow 1\le 2(x-3) \Leftrightarrow 1\le 2x-6 \Leftrightarrow \frac{7}{2}\le x$$

وهذا ليس صحيحاً لأننا لا نعلم مسبقاً أن $x-3>0$ (وهذا ما افترضناه في المكافئة الأولى من الحل). ولكننا نستطيع تفادي ذلك بملاحظة أولاً أن $x\neq 3$ لأن ذلك يجعل المقام $x-3$ صفراً وبهذا يكون المقدار $\frac{1}{x-3}$ غير معرف.ندرس

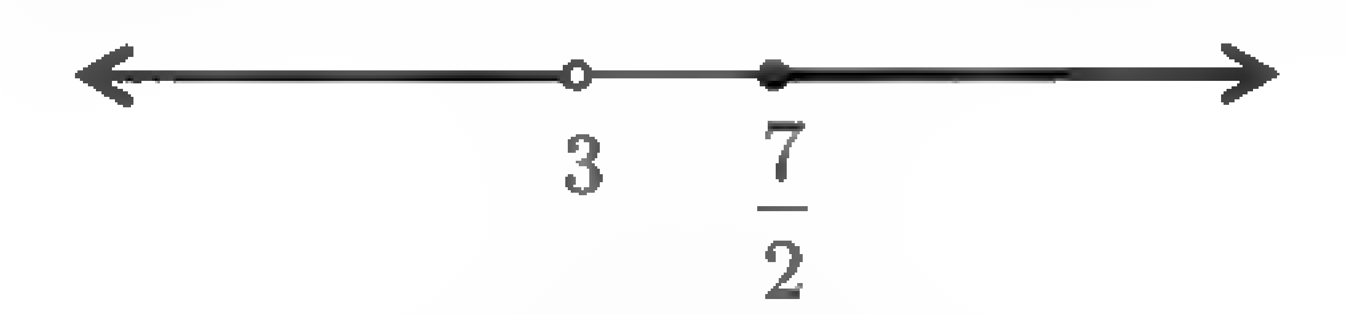
إذن، الحالتين التاليتين:

$x-3>0$: في هذه الحالة تكون الخطوات السابقة صحيحة ونحصل على $\frac{7}{2} \geq x$. وهكذا فإن الحل في المجال $x-3>0$ هو $\frac{7}{2} \geq x$.

$x-3<0$: في هذه الحالة نجد أن

$$\frac{1}{x-3} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq 2(x-3) \Leftrightarrow 1 \geq 2x-6 \Leftrightarrow \frac{7}{2} \geq x$$

وبما أن $x<3$ فنجد أن مجموعة الحل في هذا المجال هي $x<3$ و $x \leq \frac{7}{2}$. أي $x<3$. ويمكن تمثيل ذلك على خط الأعداد على النحو التالي:



وهكذا فإن الحل العام هو كل قيم x التي تحقق $\frac{7}{2} \geq x$ أو $x<3$.

حل آخر: من الممكن حل هذه المتباينة بطريقة أسرع وأسهل وذلك بإتباع الاستراتيجية العامة التالية : اجعل أحد طرفي المتباينة يساوي صفراً. وبهذا فالمطلوب إيجاد قيم x التي تجعل المقدار $\frac{1}{x-3}-2$ عدداً غير موجب. ولكن $\frac{7-2x}{x-3} = \frac{1}{x-3}-2$. وبما أن إشارة الكسر تحددها إشارتا البسط والمقام فيلزم أن نحدد مجالإشارة كل منهما. ويتم ذلك بالاستعانة بخط الأعداد كما هو موضح في الشكل أدناه.

3 $\quad$ 7/2

إشارة $7-2x$	$+++$	$+++$	$---$
إشارة $x-3$	$---$	$+++$	$+++$
إشارة $\dfrac{7-2x}{x-3}$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$

إذن، مجموعة الحل هي $x < 3$ أو $x \geq \frac{7}{3}$ وهذا يتفق مع ما وجدناه في الحل الأول. ◇

مثال (٥) حل المتباينة $2x - 3 < 7 < x + 5$.

الحل

$$2x - 3 < 7 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$$
$$7 < x + 5 \Leftrightarrow 2 < x$$

إذن، $2 < x < 5$. ◇

مثال (٦) مثلث ABC فيه $AB = 5$ ، $AC = 6$ جد جميع القيم الممكنة لطول الضلع BC.

الحل

نفرض أن $BC = x$. من متباينة المثلث نحصل على المتباينات الثلاث:

$$BC < AB + AC \Leftrightarrow x < 5 + 6 \Leftrightarrow x < 11$$
$$AC < AB + BC \Leftrightarrow 6 < 5 + x \Leftrightarrow 1 < x$$
$$AB < AC + BC \Leftrightarrow 5 < 6 + x \Leftrightarrow -1 < x$$

وبما أن $x > 0$ فنجد أن $1 < x < 11$. ◇

مثال (٧) أرادت عبير وأختها الصغرى شراء هدية لوالدهما. ساهمت عبير بمبلغ 40 ريالاً أكثر من مساهمة الأخت الصغرى. إذا كان ثمن الهدية لا يزيد عن 300 ريالاً. ما هي أعلى قيمة للمبلغ الذي ساهمت به عبير ؟

الحل

لنفرض أن x هو المبلغ الذي ساهمت به عبير. عندئذ، المبلغ الذي ساهمت به الأخت الصغرى هو $x - 40$. وبما أن ثمن الهدية لا يزيد عن 300 ريالاً فنحصل على

$$x + (x - 40) \leq 300 \Leftrightarrow 2x \leq 340$$
$$\Leftrightarrow x \leq 170$$

وبهذا يكون المبلغ الذي ساهمت به عبير لا يزيد عن 170 ريالاً. ◇

مثال (٨) إذا كانت قيمة العدد x مقرباً إلى مرتبة (خانة) واحدة هو 12.7 فما هي قيم x الممكنة ؟

الحل

هذا مثال بسيط حيث نعلم أن القيم الممكنة يجب أن تحقق المتباينة $12.65 \leq x < 12.75$. ◇

مثال (٩) جد الأعداد الصحيحة x التي تحقق المتباينة $x < 10\sqrt{2.5} < x + 1$.

الحل

$$x < 10\sqrt{2.5} < x + 1 \Leftrightarrow x < 15.8 < x + 1$$
$$\Leftrightarrow 14.8 < x < 15.8$$

إذن، القيمة الصحيحة الوحيدة التي تحقق المتباينة هي $x = 15$. ◇

مثال (١٠) إذا كان $5 \leq x \leq 7$ و $6.5 \leq y \leq 9.5$ فما هي أعلى وأصغر قيمة للمقدار $\frac{x}{y}$ ؟

الحل

أعلى قيمة للمقدار $\frac{x}{y}$ هي خارج قسمة أكبر قيمة للمقدار xعلى أصغر قيمة للمقدار y. أي، $1\frac{1}{13} = \frac{7}{6.5}$.

أصغر قيمة للمقدار $\frac{x}{y}$ هي خارج قسمة أصغر قيمة للمقدار xعلى أعلى قيمة للمقدار y. أي، $1\frac{1}{19} = \frac{10}{19} = \frac{5}{9.5}$.

إذن، $1\frac{1}{19} \leq \frac{x}{y} \leq 1\frac{1}{13}$. ◇

(٣.٣) المتباينات الخطية في متغيرين

[Linear Inequalities In Two Variables]

لقد بينا كيفية تمثيل حل المتباينة الخطية في متغير واحد x على خط الأعداد. ولكن هذا التمثيل غير ممكن في حالة المتباينات الخطية في متغيرين والتي تأخذ أحد الشكلين

$$ax + by < c$$
$$ax + by \leq c$$

ولذا، كي نستطيع حل المتباينة في متغيرين نستعين بالمستوى الديكارتي ويتم ذلك على النحو التالي :

(١) نقوم برسم المستقيم $ax + by = c$.

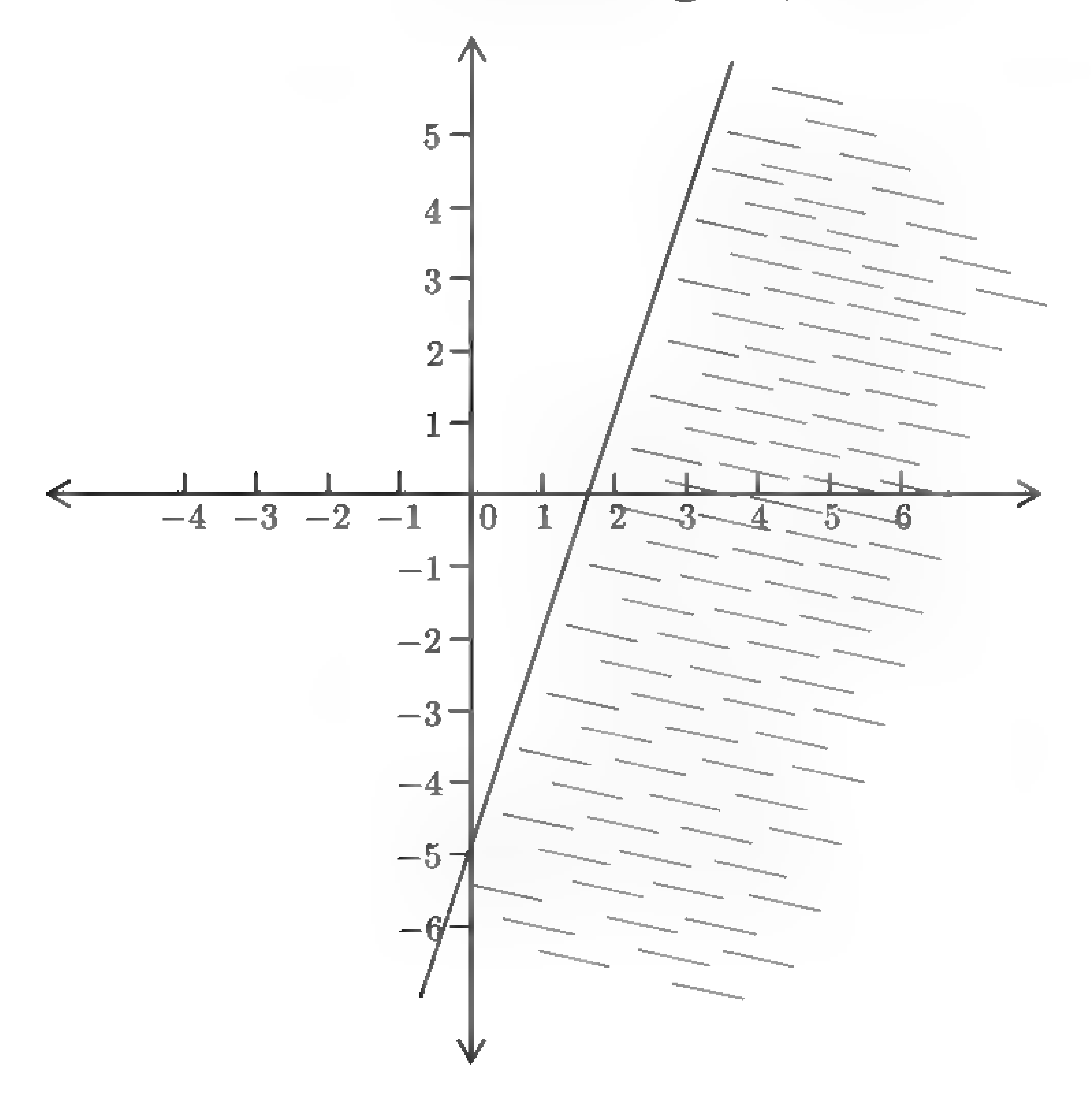
(٢) لتحديد منطقة مجموعة الحل نقوم بتجريب نقطة (x_1, y_1) لا تقع على المستقيم ومن ذلك يتم تحديد المنطقة.

نوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (١١) جد مجموع حل المتباينة $3x - y > 5$.

الحل

نرسم المستقيم $3x - y = 5$. نستطيع دائماً رسم مستقيم بمعرفة نقطتين عليه ويتم ذلك باختيار قيمتين للمتغير x (أو y) والتعويض في المعادلة لايجاد القيمتين المقابلتين للمتغير y (أو x). في مثالنا، نفرض أن قيمتي x هما $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$. عندئذ، نجد أن $y_1 = -5$ و $y_2 = +2$. والنقطتان هما $(0, -5)$ و $(1, +2)$. وبهذا فالمستقيم موضح في الشكل أدناه.



الآن، نجرب نقطة لا تقع على المستقيم ولتكن $(4,2)$. عندئذ،

$$3\times 4-2=12-2=10>5$$

ولذا فالنقطة تحقق المتباينة وتكون منطقة الحل هي المنطقة الواقعة على يمينالمستقيم. ◇

ملحوظة

ندرس في الجزء الثاني من هذه السلسلة كيفية إيجاد حلول نظام متباينات خطية في متغيرين.

(٣.٤) متباينات الدرجة الثانية [Quadratic Inequalities]

متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد تأخذ إحدى الصورتين

$$ax^2+bx+c<0 \quad (\text{أو } ax^2+bx+c\leq 0)$$

$$ax^2+bx+c>0 \quad (\text{أو } ax^2+bx+c\geq 0)$$

وأفضل استراتيجية لحلها تكون بدراسة إشارة المقدار ax^2+bx+c ونوضح ذلك في المثالين التاليين.

مثال (١٢) جد مجموعة حل المتباينة $x^2<2x+3$.

الحل

$$x^2<2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)<0$$

وبدراسة الإشارات نجد أن

		-1	3
إشارة $x+1$	$---$	$+++$	$+++$
إشارة $x-3$	$---$	$---$	$+++$

إشارة $(x+1)(x-3)$	⊕	⊖	⊕

إذن، مجموعة الحل هي $-1 < x < 3$. ◇

مثال (١٣) جد مجموعة حل المتباينة $\frac{3x-1}{x+3} > x-1$.

الحل

$$\frac{3x-1}{x+3} > x-1 \Leftrightarrow (x-1) - \frac{3x-1}{x+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{(x+3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)} < 0$$

وبرسم إشارات المقادير $x+1$ ، $x-2$ ، $x+3$ على خط الأعداد نجد أن

			$-1\ -3$	2
إشارة $x-2$	$- - -$	$- - -$	$- - -$	$+ + +$
إشارة $x+1$	$- - -$	$- - -$	$+ + +$	$+ + +$
إشارة $x+3$	$- - -$	$+ + +$	$+ + +$	$+ + +$
إشارة $\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)}$	⊖	⊕	⊖	⊕

إذن، مجموعة الحل هي $x < -3$ أو $-1 < x < 2$. ◇

(٣.٥) مقارنة الأعداد [Comparing Numbers]

من الممكن استخدام خصائص المتباينات للمقارنة بين عددين أو أكثر وهذا ما توضحه الأمثلة التالية.

مثال (١٤) أي العددين $5\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{3}$ هو الأكبر ؟

الحل

بملاحظة أن $9\times 3 < 25\times 2$ نجد أن $\sqrt{9\times 3} < \sqrt{25\times 2}$. أي أن $3\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$. ◇

مثال (١٥) أي العددين $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{5}}}$ ، $\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{7}}}$ هو الأكبر ؟

الحل

لاحظ بعمليات تربيع متتالية للعددين نحصل على

$$3\sqrt{5\sqrt{5}}, \quad 5\sqrt{3\sqrt{7}}$$

$$3^2\times 5\sqrt{5}, \quad 5^2\times 3\sqrt{7}$$

$$3^4\times 5^2\times 5, \quad 5^4\times 3^2\times 7$$

ولهذا نقارن بين العددين $3^4\times 5^3$ و $5^4\times 3^2\times 7$. الآن،

$$\begin{aligned} 3^4\times 5^3 &= 3^2\times 5^3\times 3^2 \\ &< 3^2\times 5^3\times 35 \\ &= 3^2\times 5^3\times 5\times 7 \\ &= 3^2\times 5^4\times 7 \end{aligned}$$

إذن، $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{5}}} < \sqrt{5\sqrt{3\sqrt{7}}}$. ◇

مثال (١٦) أي من العددين $A=\dfrac{54321}{54322}$ و $B=\dfrac{654321}{654322}$ هو الأكبر ؟

الحل

لاحظ أن

$$A=\frac{54321}{54322}=1-\frac{1}{54322}$$
$$B=\frac{654321}{654322}=1-\frac{1}{654322}$$

الآن،

$$\begin{aligned}654322>54322 &\Leftrightarrow \frac{1}{654322}<\frac{1}{54322}\\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{654322}>\frac{-1}{54322}\end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{6543222}>1-\frac{1}{54322}$$
$$\Leftrightarrow B>A$$

حل آخر:

$$\begin{aligned}\frac{1}{A}=\frac{54322}{54321}&=1+\frac{1}{54321}\\ &>1+\frac{1}{654321}\\ &=\frac{654322}{654321}=\frac{1}{B}\end{aligned}$$

إذن، $B>A$. ◇

مثال (١٧) رتب الأعداد تصاعدياً (من الأصغر إلى الأكبر)

2^{200} ، 3^{100} ، 4^{50} ، 5^{25}

الحل

لاحظ أن

$$2^{200}=\left(2^{8}\right)^{25}=\left(256\right)^{25}$$
$$3^{100}=\left(3^{4}\right)^{25}=\left(81\right)^{25}$$
$$4^{50}=\left(16\right)^{25}$$

وبما أن $5<16<81<256$ فنجد أن

$$5^{25}<(16)^{25}<(81)^{25}<(256)^{25}$$
$$5^{25}<4^{50}<3^{100}<2^{200}$$

(٣.٦) مسائل محلولة

(١) قيم x التي تحقق المتباينة $2x+1<3-x$ هي

(أ) $x<\frac{2}{3}$ (ب) $x>\frac{2}{3}$ (ج) $x\leq\frac{2}{3}$ (د) $x\geq\frac{2}{3}$.

(٢) قيم x التي تحقق المتباينة $9-3x\leq 2x+7<8$ هي

(أ) $x\leq-\frac{1}{2}$ (ب) $x<\frac{1}{2}$ (ج) $x>-\frac{1}{2}$ (د) $x>\frac{1}{2}$.

(٣) أضيف 5 إلى ثلاثة أمثال عدد صحيح x فكان الناتج أصغر من $5\frac{1}{2}$ وأكبر من 1. ما مجموع قيم x التي تحقق ذلك ؟

(أ) -1 (ب) 0 (ج) 1 (د) 2

(٤) عدد القيم الصحيحة الموجبة x التي تحقق المتباينة $2(x+4)>3(x-1)+6$ هو

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٥) حصل فيصل على الدرجات 86 ، 85 ، 89 في الاختبارات الثلاث الأولى. ما الدرجة التي يجب أن يحصل عليها فيصل في الاختبار الرابع لكي يكون متوسط درجاته في الاختبارات الأربعة 90على الأقل ؟

(أ) 90 (ب) 93 (ج) 98 (د) 100

(٦) ترغب سعاد في شراء جوال ولكن المبلغ الذي بحوزتها لا يكفي لذلك حيث تحتاج إلى 2000 ريال على الأقل لكي تتمكن من توفير ثمن الجوال. اتفقت مع والدتها على أن تساعدها في أعمال المنزل وتدفع لها الوالدة 80 ريالاً مقابل كل يوم عمل. ما أقل عدد من الأيام التي يجب أن تعمل بها سعاد لكي تتمكن من شراء الجوال ؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 30 (د) 35

(٧) أكبر عدد صحيح x يحقق المتباينة $(x-\frac{1}{3})\frac{1}{3} \geq \frac{x}{2} - 1$ هو

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٨) ما العدد الصحيح الذي يحقق المتباينتين

$4 < x - 2 < 8$ و $9 < 2x + 1 < 17$,

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

(٩) العدد الصحيح x الذي يحقق $x < 5\sqrt{1.6} < x + 1$ هو

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(١٠) إذا كان $6912 < 4n^3 < 13500$ فإن مجموع الأعداد الصحيحة n التي تحقق ذلك هو

(أ) 13 (ب) 14 (ج) 27 (د) 40

(١١) [AHSME 1951] إذا كان $x > 0$ ، $y > 0$ ، $z \neq 0$ ، $x > y$ فإن المتباينة التي قد لا تكون صائبة هي:

(أ) $x + z > y + z$ (ب) $x - z > y - z$

(ج) $xz > yz$ (د) $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$

(١٢) [AHSME 1967] إذا كان $\frac{a}{b} < -\frac{c}{d}$ حيث a ، b ، c ، d أعداد حقيقية تحقق $bd \neq 0$ فإن

(أ) لا بد وأن يكون a سالباً (ب) لا بد وأن يكون a موجباً

(ج) $a \leq 0$ ولكن a ليس موجباً

(د) قد يكون a سالباً أو موجباً أو صفراً

(١٣) [AHSME 1996] إذا كان $0 < a < b < c < d$ فما المقدار الأكبر من بين المقادير التالية ؟

(أ) $\frac{a+b}{c+d}$ (ب) $\frac{c+d}{a+b}$ (ج) $\frac{b+c}{a+d}$ (د) $\frac{b+d}{a+c}$

(١٤) [Aust.Math.Comp.1981] إذا رتبنا الأعداد الصحيحة $n+1$ ، $n-1$ ، $n-6$ ، $n-5$ ، $n+4$ تصاعدياً (من الأصغر إلى الأكبر) فما العدد الأوسط ؟

(أ) $n+1$ (ب) $n-1$ (ج) $n-5$ (د) $n-4$

(١٥) [Aust.Math.Comp.1983] أطوال أضلاع مثلث بالسنتيمتر هي 11 ، $7\frac{1}{2}$ ، x حيث x عدد صحيح موجب. ما أصغر قيمة للضلع x ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(١٦) [AJHSME 1986] إذا كان $200 \leq a \leq 400$ وكان $600 \leq b \leq 1200$ فما أكبر قيمة للكسر $\frac{b}{a}$ ؟

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) 6 (ج) 300 (د) 600

(١٧) [AJHSME 1987] أي من الكسور التالية هو الأكبر ؟

(أ) $\frac{151}{301}$ (ب) $\frac{100}{201}$ (ج) $\frac{17}{35}$ (د) $\frac{4}{9}$

(١٨) العدد $\sqrt{122}$:

(أ) يساوي 12 (ب) أقل من 11 (ج) بين 11 و 12 (د) أكبر من 12

(١٩) [AMC8 2001] الترتيب الصحيح للأعداد 2^{24} ، 5^{12} ، 10^{8} هو

(أ) $2^{24} < 10^8 < 5^{12}$ (ب) $2^{24} < 5^{12} < 10^8$

(ج) $5^{12} < 2^{24} < 10^8$ (د) $10^8 < 5^{12} < 2^{24}$

(٢٠) [AMC8 2007] لنفرض أن $0 < a < b < c$. العبارة الخاطئة دائماً هي:

(أ) $a + c < b$ (ب) $ab < c$ (ج) $a + b < c$ (د) $\frac{c}{b} = a$

(٢١) [Aust.Math.comp.1983] إذا كان $0 < p < 1$ فواحدة فقط من بين العبارات التالية صائبة. من هي ؟

(أ) $p > \sqrt{p}$ (ب) $\frac{1}{p} > \sqrt{p}$ (ج) $p > \frac{1}{p}$ (د) $p^3 > p^2$.

(٢٢) [Aust.Math.Comp.1978] إذا كان $a > 0$ و $b < 0$ فما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية ؟

(أ) $a > -b$ (ب) $-a > b$ (ج) $a - b > 0$ (د) $ab > 0$.

(٢٣) إذا كان $0 < y < x$ و $0 < b < a$ فإن

(أ) $\frac{x}{b} > \frac{y}{a}$ (ب) $\frac{x}{a} > \frac{y}{b}$ (ج) $\frac{x}{b} < \frac{y}{a}$ (د) $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$

(٢٤) لنفرض أن $x > 0$ و $y < 0$. أي المتباينات صائبة:

(أ) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ (ب) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ (ج) $\frac{1}{x} < y$ (د) $\frac{1}{y} > x$

(٢٥) إذا كان $a = \sqrt{3\sqrt[3]{2}}$ وكان $b = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}$، $c = \sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ فإن

(أ) $c < a < b$ (ب) $b < a < c$

(ج) $b < c < a$ (د) $c < b < a$

(٢٦) أي من العبارات التالية صائبة:

(أ) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[5]{5}$ (ب) $\sqrt[3]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[5]{5}$

(ج) $\sqrt[5]{5} < \sqrt[3]{3} < \sqrt{2}$ (د) $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

(٢٧) [Aust.Math.Comp.1980] إذا كان $x > 5$ فما أصغر الأعداد التالية:

(أ) $\frac{5}{x}$ (ب) $\frac{5}{x+1}$ (ج) $\frac{x}{5}$ (د) $\frac{5}{x-1}$

(٢٨) [Aust.Math.Comp.1980] لكل عدد حقيقي c ، العبارة الصائبة هي:

(أ) $8c > 4c$ (ب) $4c > 8c$

(ج) $8c^2 > 4c^2$ (د) $8 + c > 4 + c$

(٢٩) إذا مثلنا مجموعة حل المتباينة $1 \leq 2x - 1 \leq 11$ على خط الأعداد فما طول الفترة ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٣٠) [Aust.Math.Comp.1980] إذا كان $-2.4 < x < -1.5$ وكان $0 < p < 2$ فإن

(أ) $0 < px < 3$ (ب) $-4.8 < px < -3.6$

(ج) $-4.8 < px < 0$ (د) $-4.8 < px < -3$

(٣١) إذا كانت $-6 < x \leq 5$ و $-5 \leq y \leq 10$ فما أعلى قيمة للمقدار $x^2 - y^2$ ؟

(أ) 25 (ب) 36 (ج) 64 (د) 90

(٣٢) إذا كان x عدداً حقيقياً موجباً فإن

(أ) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (ب) $x + \frac{1}{x} > 1$

(ج) $1 < x + \frac{1}{x} < 2$ (د) $x + \frac{1}{x} < 0$

(٣٣) مجموعة حل المتباينة $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ هي

(أ) $0 \leq x \leq 5$　　(ب) $x > 5$

(ج) جميع الأعداد الحقيقية　　(د) $x \geq 25$

(٣٤) طول الفترة على خط الأعداد التي تحقق المتباينة $(x+1)^2 \leq 5x+1$ هو

(أ) 1　　(ب) 2　　(ج) 3　　(د) 5

(٣٥) إذا كان $-5 \leq x \leq 2$ وكان $1 \leq y \leq 7$ فما هي القيمة الكبرى للمقدار $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^2}$ ؟

(أ) 22　　(ب) 23　　(ج) $24\frac{6}{7}$　　(د) $25\frac{1}{7}$

(٣٦) إذا أضفنا 5 إلى ثلاث أمثال عدد صحيح x كان العدد الناتج لا يزيد عن 6 ولا يقل عن 3. ما هي قيمة x ؟

(أ) -2　　(ب) 0　　(ج) 2　　(د 3)

(٣٧) اقترح مجموعة من التلاميذ على إدارة المدرسة تنظيم رحلة مدرسية فوافقت الإدارة على أن يساهم كل من يرغب الإنضمام إلى الرحلة بمبلغ 30 ريالاً وساهمت المدرسة بمبلغ 500 ريالاً. إذا اشترطت إدارة المدرسة أن لا يقل المبلغ المرصود للرحلة عن 1500 ريالاً فما هو أقل عدد للتلاميذ اللازم لإتمام

الرحلة ؟

(أ) 33　　(ب) 34　　(ج) 36　　(د) 40

(٣.٧) حلول المسائل

(١) الإجابة هي (أ):

$$.2x+1<3-x \Leftrightarrow 3x<2 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$$

(٢) الإجابة هي (ب):

$$8>2x+7 \Leftrightarrow 1>2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}>x$$
$$2x+7\geq 3x-9 \Leftrightarrow x\leq 16$$

إذن، $\frac{1}{2} > x$ و $x \leq 16$. أي أن $x < \frac{1}{2}$.

(٣) الإجابة هي (أ): لدينا

$$1<3x+5<5\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4<3x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-4}{3}<x<\frac{1}{6}$$

العددان الصحيحان اللذان يحققان ذلك هما -1 و 0 ومجموعهما يساوي -1.

(٤) الإجابة هي (ج):

$$\begin{aligned} 2(x+4)>3(x-1)+6 &\Leftrightarrow 2x+8>3x+3 \\ &\Leftrightarrow 3x-2x<8-3 \\ &\Leftrightarrow x<5 \end{aligned}$$

إذن، الأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق ذلك هي 1، 2، 3، 4 وعددها 4.

(٥) الإجابة هي (د): لنفرض أن x هي درجة الاختبار الرابع. عندئذ، نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{x+89+85+86}{4}\geq 90 &\Leftrightarrow \frac{x+260}{4}\geq 90 \\ &\Leftrightarrow x+260\geq 360 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 360 - 260$$
$$\Leftrightarrow x \geq 100$$

بما أن الدرجة القصوى للاختبار هي 100فإن فيصل يجب أن يحصل على درجة على الأقل 100 فتكون الإجابة هي 100.

(٦) الإجابة هي (ب): نفرض أن عدد الأيام هو x. عندئذ،

$$80x \geq 2000 \Leftrightarrow x \geq \frac{2000}{80} \Leftrightarrow x \geq 25$$

إذن، أصغر عدد x يحقق ذلك هو 25.

(٧) الإجابة هي (ب):

$$\begin{aligned}
1-\frac{x}{2} \geq \frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}) &\Leftrightarrow 1-\frac{x}{2} \geq \frac{1}{3}x-\frac{1}{9} \\
&\Leftrightarrow -\frac{x}{2}-\frac{1}{3}x \geq -\frac{1}{9}-1 \\
&\Leftrightarrow -\frac{5}{6}x \geq \frac{-10}{9} \\
&\Leftrightarrow -x \geq \frac{-10}{9}\times\frac{6}{5} \\
&\Leftrightarrow -x \geq \frac{-4}{3} \\
&\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

إذن، أكبر عدد صحيح يحقق المتباينة هو $x = 1$.

(٨) الإجابة هي (ج):

$$4 < x-2 < 8 \Leftrightarrow 4+2 < x < 8+2 \Leftrightarrow 6 < x < 10$$

$$\begin{aligned}
9 < 2x+1 < 17 &\Leftrightarrow 9-1 < 2x < 17-1 \\
&\Leftrightarrow 8 < 2x < 16 \\
&\Leftrightarrow 4 < x < 8
\end{aligned}$$

ولذا فالعدد الصحيح المطلوب هو العدد x الذي يحقق $10 > x > 6$ و $8 > x > 4$. ولذا فإن $x = 7$.

(٩) الإجابة هي (د):

$$x < 5\sqrt{1.6} < x+1 \Leftrightarrow x < 5\times 1.27 < x+1$$
$$\Leftrightarrow x < 6.32 < x+1$$

إذن، $x < 6.32$ و $x > 5.32$. أي أن $5.32 < x < 6.32$.

والعدد الصحيح الوحيد الذي يحقق ذلك هو $x = 6$.

(١٠) الإجابة هي (ج):

$$6912 < 4n^3 < 13500 \Leftrightarrow 1728 < n^3 < 3375$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1728} < \sqrt[3]{n^3} < \sqrt[3]{3375}$$
$$\Leftrightarrow 12 < n < 15$$

إذن، العددان الصحيحان اللذان يحققان المتباينة هما 13 و 14 ومجموعهما يساوي 27.

(١١) الإجابة هي (ج): إضافة أو طرح عدد لطرفي المتباينة يحافظ على الترتيب. ولذا فإن (أ) و (ب) صائبتان. كذلك $z^2 > 0$ ومن ثم ضرب طرفي متباينة بعدد موجب يحافظ على الترتيب. إذا كان $z < 0$ وكان $x > y$ فإن $xz < yz$. وبهذا فالمتباينة الخاطئة هي (ج).

(١٢) الإجابة هي (د):

خذ $a = 1$ ، $b = 1$ ، $c = -2$ ، $d = 1$. عندئذ، المتباينة محققة.

خذ $a = 0$ ، $b = 1$ ، $c = -2$ ، $d = 1$ وتتحقق المتباينة أيضاً في هذه الحالة.

وأخيراً، بوضع $a=-1$، $b=1$، $c=0$ ، $d=0$ نجد أن المتباينة محققة أيضاً. وبهذا فإن الإجابة الصائبة هي (د).

(١٣) الإجابة هي (ب): يكون الكسر أكبر ما يمكن عندما يكون البسط أكبر ما يمكن والمقام أصغر ما يمكن. الآن أكبر قيمة ممكنة للبسط هي $c+d$ وأصغر قيمة ممكنة للمقام هي $a+b$. إذن، أكبر المقادير هو $\frac{c+d}{a+b}$.

(١٤) الإجابة هي (ب): ترتيب الأعداد هو

$$n-6<n-5<n-1<n+1<n+4$$

ولذا فالعدد الأوسط هو $n-1$.

(١٥) الإجابة هي (ج): لدينا المتباينات الثلاث

$$x+11>7\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>-3\frac{1}{2}$$
$$x+7\frac{1}{2}>11 \Leftrightarrow x>3\frac{1}{2}$$
$$7\frac{1}{2}+11>x \Leftrightarrow 18\frac{1}{2}>x$$

إذن، $3\frac{1}{2}<x<18\frac{1}{2}$. وأصغر قيمة صحيحة للعدد x هي $x=4$.

(١٦) الإجابة هي (ب): نحصل على القيمة الكبرى لكسر عندما يكون البسط كبيراً والمقام صغيراً. إذن، $b=1200$ و $a=200$ ويكون

$$\frac{b}{a}=\frac{1200}{200}=6.$$

(١٧) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$$\frac{100}{201}<\frac{100.5}{201}=\frac{1}{2} \quad ، \quad \frac{17}{35}<\frac{17.5}{35}=\frac{1}{2} \quad ، \quad \frac{4}{9}<\frac{4.5}{9}=\frac{1}{2}.$$

ولكن $\frac{1}{2} = \frac{150.5}{301} > \frac{151}{301}$.

(١٨) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$121 < 122 < 144 \Leftrightarrow \sqrt{121} < \sqrt{122} < \sqrt{144}$$
$$\Leftrightarrow 11 < \sqrt{122} < 12$$

(١٩) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$$2^{24} = \left(2^6\right)^4 = (64)^4$$
$$5^{12} = \left(5^3\right)^4 = (125)^4$$
$$10^8 = \left(10^2\right)^4 = (100)^4$$

وبما أن $64 < 100 < 125$ فإن $(64)^4 < (100)^4 < (125)^4$ ويكون $2^{24} < 10^8 < 5^{12}$.

(٢٠) الإجابة هي (أ): بما أن $a > 0$ وأن $b < c$ فإن $b < c + a$. وهذا فالعبارة (أ) لا يمكن أن تكون صائبة.

(٢١) الإجابة هي (ب): لكي تكون إحدى العبارات صائبة فيجب أن تكون صائبة لجميع قيم p حيث $0 < p < 1$. خذ $p = \frac{1}{4}$. عندئذ،

(أ) $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ خاطئة

(ب) $\frac{1}{2} > 4$ صائبة

(ج) $4 > \frac{1}{4}$ خاطئة

(د) $\frac{1}{16} > \frac{1}{64}$ خاطئة

(٢٢) الإجابة هي (ج): بما أن $b < 0$ فإن $-b > 0$. إذن، $a - b = a + (-b) > 0$.

(٢٣) الإجابة هي (أ): بما أن $0 < b < a$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

وبما أن $x > 0$ فإن $\frac{x}{a} > \frac{x}{b}$.

أيضاً $x > y > 0$ و $a > 0$ يؤدي إلى أن $\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$.

إذن، $\frac{y}{a} > \frac{x}{b}$.

(٢٤) الإجابة هي (أ): بما أن $y < 0$ فإن $\frac{1}{y} < 0$. وبما أن $x > 0$ فإن $\frac{1}{x} > 0$. إذن، $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$.

(٢٥) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$a^6 = \left(3\sqrt[3]{2}\right)^3 = 27 \times 2 = 54$$
$$b^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = 12$$
$$c^6 = \left(2\sqrt[3]{3}\right)^3 = 8 \times 3 = 24$$

إذن، $b^6 < c^6 < a^6$. وهذا فإن $b < c < a$.

(٢٦) الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$\left(\sqrt{2}\right)^{30} = 2^{15} = 32768$$
$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{30} = 3^{10} = 59049$$
$$\left(\sqrt[5]{5}\right)^{30} = 5^{6} = 15625$$

وبما أن $15625 < 32768 < 59049$ فإن $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

(٢٧) الإجابةهي (ب): لاحظ أن

$$x > x - 1 \Rightarrow \frac{x}{5} > \frac{x-1}{5} \Rightarrow \frac{5}{x} < \frac{5}{x-1}$$

$$x > 5 \Rightarrow \frac{5}{x+1} < \frac{5}{6}$$

$$x > 5 \Rightarrow \frac{x}{5} > 1$$

إذن، العدد الأصغر إما أنه $\frac{x}{5}$ أو $\frac{5}{x+1}$. ولكن $\frac{x}{5} > 1 > \frac{5}{6} > \frac{5}{x+1}$.

إذن، $\frac{5}{x+1}$ هو أصغر الأعداد.

(٢٨) الإجابة هي (د): بما أن $8 > 4$ فإن $c + 8 > c + 4$. لاحظ أيضاً أن (أ) خاطئة إذا كان $c \leq 0$، (ج) خاطئة إذا كان $c = 0$، (ب) خاطئة إذا كان $c \geq 0$.

(٢٩) الإجابة هي (ج): لدينا

$$1 \leq 2x - 1 \leq 11 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 12 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6$$

ولذا فطول الفترة هو $6 - 1 = 5$

(٣٠) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$-2.4 < x < -1.5 \Rightarrow -2.4p < px < -1.5p$$
$$\Rightarrow -2.4p < px < 0$$

(٣١) الإجابة هي (ب): نحصل على أعلى قيمة للمقدار $x^2 - y^2$ عند أكبر قيمة للمقدار x^2 وأصغر قيمة للمقدار y^2. إذن،

$$x^2 - y^2 = \left(-6\right)^2 - 0 = 36$$

(٣٢) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

(٣٣) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0$$

وهذا صحيح لجميع الأعداد الحقيقية x .

(٣٤) الإجابة هي (ج): لدينا

$$\begin{aligned}(x+1)^2 \leq 5x+1 &\Leftrightarrow x^2+2x+1 \leq 5x+1\\ &\Leftrightarrow x^2-3x \leq 0\\ &\Leftrightarrow x(x-3) \leq 0\end{aligned}$$

وبدراسة إشارة المقدار $x(x-3)$

		0	3
إشارة x	$---$	$+++$	$+++$
إشارة $x-3$	$---$	$---$	$+++$
إشارة $x(x-3)$	⊕	⊖	⊕

نجد أن $0 \leq x \leq 3$. وهذا فطول فترة الحل يساوي $3 = 0 - 3$.

(٣٥) الإجابة هي (ج):

نحصل على القيمة العظمى للمقدار $\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y}$ عند قيمة عظمى للمقدار $\frac{x^2}{y^2}$ وقيمة صغرى للمقدار $\frac{1}{y}$.القيمة العظمى للمقدار $\frac{x^2}{y^2}$ نحصل عليها عندما تكون قيمة x^2 عظمى وقيمة y^2 صغرى. أي أن $\frac{x^2}{y^2} = \frac{25}{1} = 25$.

والقيمة الصغرى للمقدار $\frac{1}{y}$ نحصل عليها عندما تكون قيمة y كبيرة. أي

أن $\frac{1}{7} = \frac{1}{y}$. إذن، القيمة العظمى للمقدار $\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y}$ هي $25 - \frac{1}{7} = 24\frac{6}{7}$.

(٣٦) الإجابة هي (ب): لدينا

$$3 \leq 3x + 5 \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} .$$

إذن، العدد الصحيح الذي يحقق ذلك هو $x = 0$.

(٣٧) الإجابة هي (ب): نفرض أن عدد التلاميذ هو x. عندئذ،

$$30x + 500 \geq 1500 \Leftrightarrow 30x \geq 1000 \Leftrightarrow x \geq 33.3$$

إذن، أقل عدد للتلاميذ هو 34.

(٣.٨) مسائل غير محلولة

(١) قيم x التي تحقق المتباينة $6 < 2x + 2 \leq x + 5$ هي

(أ) $x > 2$ (ب) $x \leq 3$ (ج) $2 < x \leq 3$ (د) $2 \leq x \leq 3$

(٢) العدد الصحيح x الذي يحقق كلاً من المتباينتين

$5 < x + 2 < 7$ و $10 < 2x + 3 < 17$ هو

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٣) مجموع الأعداد الصحيحة n التي تحقق$225 > \frac{n^3}{15} > 115.2$يساوي

(أ) 13 (ب) 14 (ج) 17 (د) 27

(٤) أكبر عدد أولي p يحقق $3p + 8 \leq 116$ هو

(أ) 17 (ب) 23 (ج) 29 (د) 31

(٥) إذا كان $2.5 \leq x \leq 7.5$ و $4.5 \leq y \leq 6.5$ فما هي أصغر قيمة للمقدار $x - 2y$ ؟

(أ) -10.5 (ب) -6 (ج) 10.5 (د) 11.5

(٦) إذا كان $x + y = 35$ وكان كل من x و y عدداً صحيحاً موجباً يقبل القسمة على العدد 5 وكان$y < x$ فإن مجموع قيم xالممكنة يساوي

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 30 (د) 35

(٧) إذا كان $-4 \leq x \leq 1$ و $-6 \leq y \leq 4$ فما أعلى قيمة للمقدار $x^2 - y^2$ ؟

(أ) 16 (ب) 24 (ج) 30 (د) 36

(٨) قام أحمد بممارسة رياضة المشي والهرولة حول المثلث $\triangle ABC$. هرول من

A باتجاه B لمدة 12 دقيقة بسرعة x متر في الدقيقة ثم مشى 200 متر فوصل إلى الرأس B. بعد ذلك غادر B باتجاه C مهرولاً لمدة 4 دقائق بسرعة x متر في الدقيقة ثم مشى 400 متر فوصل إلى الرأس C. بعد ذلك مشى المسافة من C إلى A ومقدارها 1400 متر. ما القيم الممكنة لسرعة الهرولة x ؟

(أ) $50 < x < 100$ (ب) $50 < x < 150$

(ج) $40 < x < 200$ (د) $50 < x < 200$

(٩) عدد الأعداد الأولية p التي تكون أصغر من 10 وتحقق المتباينة $5(2-p) \leq 7p - 2(p-3)$ هو

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 3 (د) 4

(١٠) عدد الأعداد الصحيحة n التي تحقق المتباينة $1 + \frac{n}{5} < 7 < \frac{n}{5}$ هو

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 7

(١١) إذا كان $a = \sqrt[3]{6\sqrt{3}}$، $b = \sqrt{3\sqrt[3]{3}}$، $c = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ فما المتباينة الصائبة ؟

(أ) $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ (ب) $\frac{1}{c} < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(ج) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$ (د) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{c}$

(١٢) [AMC10 2001] العدد x يزيد بمقدار 2 عن حاصل ضرب مقلوبه ومعكوسه الجمعي. في أي الفترات يقع x ؟

(أ) $-4 \leq x \leq -2$ (ب) $-2 \leq x \leq 0$

(ج) $0 \leq x \leq 2$ (د) $-2 \leq x \leq 0$

(١٣) الأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق المتباينة $2 \leq \frac{n+3}{n+1} \leq 1$ هي

(أ) جميع الأعداد الصحيحة الموجبة (ب) $n \geq 3$

(ج) $n \geq 5$ (د) $n = 1$ فقط

(١٤) ما الأعداد الأولية p التي تحقق $108 < 4p^3 < 864$ ؟

(أ) 3 فقط (ب) 3 و 5 (ج) 5 فقط (د) 5 و 7

(١٥) مجموع الأعداد الصحيحة x التي تحقق المتباينتين

$6x - 3 < 2x + 5$ و $\frac{2x-1}{3} + \frac{2x-1}{2} \geq -3$ هو

(أ) -1 (ب) 0 (ج) 1 (د) 2

(١٦) قيم x التي تحقق المتباينة $x^2 + 4 < 9$ هي

(أ) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ (ب) $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

(ج) $0 < x < \sqrt{5}$ (د) $0 < x < \sqrt{3}$

(١٧) العدد الأكبر من بين الأعداد 8^8 ، 16^4 ، 4^{19} ، 2^{37} هو

(أ) 8^8 (ب) 16^4 (ج) 4^{19} (د) 2^{36}

(١٨) إذا كانت a، b، c، d أعداداً حقيقية موجبة حيث $ab > cd$ فإن العبارة الصائبة هي:

(أ) $\frac{a}{c} < \frac{d}{b}$ (ب) $\frac{a}{d} < \frac{c}{b}$ (ج) $\frac{a}{d} > \frac{c}{b}$ (د) $\frac{b}{c} < \frac{d}{a}$

(١٩) أصغر عدد صحيح موجب x يحقق $4x^2 > 400$ هو

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12

(٢٠) قيم x الحقيقية التي تحقق المتباينة $1 \leq \dfrac{1}{x^2+1}$ هي

(أ) جميع الأعداد الحقيقية (ب) $x > 1$ فقط

(ج) $x > 0$ فقط (د) لا توجد قيم حقيقية تحقق المتباينة

(٢١) إذا كان $\dfrac{2}{y} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$ فإن:

(أ) $y < 2x$ (ب) $x < 2y$ (ج) $\dfrac{2}{x} < \dfrac{1}{y}$ (د) $2x < y$

(٢٢) إذا كان x عدداً صحيحاً يحقق $-69 < 2x + 1 \leq 69$ فما أكبر قيمة للعدد x بحيث يكون مربعاً كاملاً ؟

(أ) 9 (ب) 16 (ج) 25 (د) 36

(٢٣) إذا كان طول ضلعي مثلث هما 6 سم و 8 سم وكان طول الضلع الثالث عدداً صحيحاً فما عدد المثلثات الممكنة ؟

(أ) 3 (ب) 8 (ج) 9 (د) 11

(٢٤) ما هو عدد المجموعات المكونة من أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية بحيث يكون مجموع أعدادها أصغر من 50 ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 14

(٢٥) إذا ضربنا عدداً صحيحاً موجباً بالعدد 6 ثم أضفنا العدد 21 يكون الناتج أكبر من ضرب العدد بالعدد 8 ثم طرح العدد 7. ما أكبر الأعداد الصحيحة التي تحقق ذلك ؟

(أ) 10 (ب) 11 (ج) 12 (د) 13

(٢٦) مع بهاء 25 حبة حلوى ومع آدم 55 حبة من الحلوى نفسها. ما أصغر عدد من حبات الحلوى التي يتوجب على بهاء إعطاءها لآدم لكي يصبح ما مع آدم أكثر من 4 أمثال ما مع بهاء ؟

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12

(٢٧) قيم x التي تحقق $-(2x+5) < x-3 < 2x+5$ هي

(أ) $x > -\frac{2}{3}$ (ب) $x > -8$ (ج) $-8 < x < -\frac{2}{3}$ (د) $x > \frac{2}{3}$

(٢٨) قيم x التي تحقق $-\left(x^2+3x+2\right) < x+2 < x^2+3x+2$ هي

(أ) $x > 0$ فقط (ب) $x < -2$ فقط

(ج) $x > 0$ أو $x < -2$ (د) $-2 < x < 0$

(٢٩) قيم x التي تحقق المتباينة $\frac{16}{x} < x$ هي

(أ) $0 < x < 4$ فقط (ب) $0 < x < 4$ أو $x < -4$

(ج) $x < -4$ فقط (د) $x > 4$ أو $x < -4$

(٣.٩) إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) ج	(٣) د	(٤) د	(٥) أ
(٦) ج	(٧) أ	(٨) د	(٩) د	(١٠) ب
(١١) أ	(١٢) ج	(١٣) أ	(١٤) ج	(١٥) ب
(١٦) ب	(١٧) ج	(١٨) ج	(١٩) ج	(٢٠) أ
(٢١) أ	(٢٢) ج	(٢٣) د	(٢٤) ب	(٢٥)د
(٢٦) ب	(٢٧) أ	(٢٨) ج	(٢٩) ب	

الفصل الرابع

كثيرات الحدود
Polynomials

(٤.١) مقدمة [Introduction]

رأينا في الفصل الثاني معادلات الدرجة الأولى ومعادلات الدرجة الثانية في متغير x وهذه ما هي إلا أمثلة على مفهوم أساسي في الرياضيات وهو كثيرات الحدود، فكثيرة الحدود في متغير x من الدرجة n تأخذ الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية تسمى معاملات، $a_n \neq 0$. فمثلاً، $x^2 + 4x - 2$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية، $3x^5 - 2x^2 + \sqrt{3}x + 4$ كثيرة حدود من الدرجة الخامسة. أما $\dfrac{x+1}{x^5+2}$، $3\sqrt{x} + 4$، $6x^2 - \dfrac{3}{x}$ فلا تعد كثيرات حدود. تسمى كثيرة الحدود التي معامل الحد ذو الدرجة العليا 1، كثيرة حدود واحدية (monic). فمثلاً، $x^4 + 2x^2 + 5$ كثيرة حدود واحدية من الدرجة 4.

سنرمز لدرجة كثيرة الحدود $f(x)$ بالرمز $\deg\big(f(x)\big)$.

نعني بجذر (أو صفر) لكثيرة حدود $f(x)$، عدداً a يحقق $f(a) = 0$. كما يسمى صفر كثيرة الحدود $f(x)$ جذراً للمعادلة $f(x) = 0$. فمثلاً،

إذا كانت $f(x) = x^2 - 4$ فإن $f(2) = 0$ و $f(-2) = 0$. ولذا فكل من 2 و -2 جذر لكثيرة الحدود.

مثال (١)[AHSME 1995] إذا كانت $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ وكان $f(-3) = 2$ فاحسب قيمة $f(3)$.

الحل

$$f(-3) = 2 \Rightarrow a(-3)^4 - b(-3)^2 - 3 + 5 = 2 \Rightarrow 81a - 9b = 0$$

الآن،

$$f(3) = a(3)^4 - b(3)^2 + 3 + 5 = (81a - 9b) + 8 = 0 + 8 = 8 . \diamond$$

(٤.٢) العمليات على كثيرات الحدود [Operations on Poynomials]

يمكن جمع أو طرح كثيرتي حدود $f(x)$ و $g(x)$ وذلك بجمع أو طرح معاملات الحدود ذات القوى المتساوية. فإذا كانت $f(x) = 2x^2 - 36x + 9$ و $g(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$ فإن

$$f(x) + g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 31x + 8$$
$$f(x) - g(x) = -2x^3 - 2x^2 - 41x + 10$$

لضرب كثيرتي حدود، نقوم باستخدام قاعدة توزيع الضرب على الجمع وضرب الأسس لنحصل على كثيرة حدود جديدة.

مثال (٢) إذا كانت $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 + 2x + 4$ فإن

$$f(x)g(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$
$$= x(x^2 + 2x + 4) - 2(x^2 + 2x + 4)$$

$$= x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8$$
$$= x^3 + (2x^2 - 2x^2) + (4x - 4x) - 8$$
$$= x^3 - 8$$

لاحظ أن $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$. ◇

أما قسمة كثيرتي حدود فتتم بصورة مماثلة تماماً لعملية قسمة الأعداد بطريقة القسمة المطولة وأفضل وسيلة لتوضيح ذلك هو الأمثلة.

مثال (٣) إذا كانت $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ وكانت $g(x) = x^2 + 1$ فجد $\frac{f(x)}{g(x)}$.

الحل

باستخدام القسمة المطولة نحصل على

$$\begin{array}{r|l} & 5x + 4 \\ \hline x^2 + 1 & 5x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \\ & 5x^3 \qquad\quad + 5x \\ \hline & \qquad 4x^2 - 3x - 1 \\ & \qquad 4x^2 \qquad + 4 \\ \hline & \qquad\quad - 3x - 5 \end{array}$$

نتوقف هنا لأن درجة $-3x - 5$ أقل من درجة $x^2 + 1$. ويكون خارج القسمة هو $5x + 4$ والباقي هو $-3x - 5$. ◇

لاحظ أن بالإمكان كتابة $f(x)$ في المثال (٣) على النحو التالي

$f(x) = (5x + 4)g(x) + (-3x - 5)$.

وهذا صحيح دائماً استناداً إلى خوارزمية القسمة التي تنص على:

خوارزمية القسمة[Division Algorithm]

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود فتوجد كثيرتا حدود وحيدتان $q(x)$ (تسمى خارج القسمة) و $r(x)$ (تسمى باقي القسمة) حيث
$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ ، $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x))$ أو $r(x) = 0$.

(٣.٤) جذور كثيرات الحدود[Roots of Polynomials]

لقد رأينا وجود قانون عام لإيجاد جذور كثيرات الحدود من الدرجة الثانية، كما أنه يوجد قانون عام لإيجاد جذور كثيرتي الحدود من الدرجتين الثالثة والرابعة ولكن تقديمهما يخرجنا عن نطاق هذا الكتاب. أما كثيرات الحدود من الدرجة الخامسة فأكثر فلا يوجد قانون عام لإيجاد جذورها ولكن توجد بعض الحقائق العامة التي تساعدنا على إيجاد هذه الجذور للعديد من كثيرات الحدود. سنذكر بعض هذه الحقائق دون برهان.

(١) **مبرهنة العامل الخطي.**

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n وقسمناها على العامل الخطي $x - a$ فإن

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$$

حيث $q(a)$ كثيرة حدود من الدرجة $n - 1$.

ويكون $x - a$ عاملاً (قاسماً) من عوامل $f(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

(٢) اختبار الأصفار الكسرية

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة، $a_n \neq 0$ وكان $\frac{p}{q}$ صفراً كسرياً

مكتوباً في أبسط صورة لها فإن p يقسم a_0 و q يقسم a_n.

(٣) العلاقة بين معاملات كثيرة الحدود وأصفارها.

إذا كانت $f(x) = x^2 + px + q$ وكان α_1 و α_2 جذري كثيرة الحدود $f(x)$ فلقد بينا في الفصل الثاني أن $p = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ وأن $q = \alpha_1 \alpha_2$.

توجد علاقات مماثلة لكثيرات الحدود من الدرجات العليا، نذكر واحدة منها لكثيرات حدود الدرجة الثالثة. فإذا كانت $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ وكانت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ جذور كثيرة الحدود $f(x)$ فإن

$$
\begin{aligned}
p &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\
q &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 \\
r &= -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3
\end{aligned}
$$

(٤) المبرهنة الأساسية في الجبر

أي كثيرة حدود من الدرجة $n \geq 1$ لها على الأقل جذر حقيقي أو مركب.

لاحظ أن المبرهنة الأساسية في الجبر تسمح لنا بكتابة كثيرة الحدود كالتالي:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&= c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)
\end{aligned}
$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ هي جذور كثيرة الحدود $f(x)$ وهذه الجذور ليست

بالضرورة مختلفة.

ملحوظة

إذا كان α جذراً لكثيرة الحدود مكرراً m من المرات فنقول إنه جذر مضاعف عدد تكراراته m. وإذا كان $m = 1$ فنقول إنه جذر بسيط.

مثال (٤) [AHSME 1965] إذا كان r_1 هو باقي قسمة $f(y) = y^2 + my + 2$ على $y - 1$ وكان r_2 هو باقي قسمتها على $y + 1$ وكان $r_1 = r_2$ فجد قيمة m.

الحل

باستخدام مبرهنة العامل الخطي نجد أن

$$r_1 = f(1) = 1^2 + m \times 1 + 2 = m + 3$$
$$r_2 = f(-1) = (-1)^2 + m \times (-1) + 2 = -m + 3$$

وبما أن $r_1 = r_2$ فنجد أن $m + 3 = -m + 3$. أي أن $2m = 0$ ومنه فإن $m = 0$. ◇

مثال (٥) جد جميع جذور كثيرة الحدود $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$.

الحل

باستخدام مبرهنة الجذور الكسرية نجد أن الجذور الكسرية إن وجدت يجب أن تكون قواسم العدد 8 وهي $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. وبالتجريب نجد أن

$$f(1) = 1^3 + 5 \times 1^2 + 2 \times 1 - 8 = 0$$
$$f(-2) = -8 + 20 - 4 - 8 = 0$$
$$f(-4) = -64 + 80 - 8 - 8 = 0$$

إذن، -4 ، -2 ، 1 هي جميع جذور كثيرة الحدود (لماذا لا توجد جذور أخرى؟). ◇

مثال (٦)[AHSME 1988] لنفرض أن b و c عددان حقيقيان حيث $(x+2)(x+b)=x^2+cx+6$. جد قيمة كل من b و c.

الحل

لاحظ أن صفري كثيرة الحدود هما $x_1=-2$ و $x_2=-b$. من علاقة فــيتاي نعلم أن $x_1x_2=6$. إذن، $2b=6$ ومن ثم فإن $b=3$. أيضاً $x_1+x_2=-c$. ومنه فإن $-c=-2-3$. وبهذا يكون $c=5$. ◇

مثال (٧)[AHSME 1988] لنفرض أن a و b عددان صحيحان وأن x^2-x-1 عامل لكثيرة الحدود ax^3+bx^2+1 . جد قيمة كل من a و b.

الحل

باستخدام القسمة المطولة نجد أن

$$ax^3+bx^2+1=(ax+a+b)\left(x^2-x-1\right)+(2a+b)x+(a+b+1)$$

وبهذا يكون الباقي هو $(2a+b)x+(a+b+1)$.

وبما أن x^2-x-1 قاسماً لكثيرة الحدود فإن الباقي يساوي صفر. إذن،

$$(2a+b)x+(a+b+1)=0$$

وبهذا يكون $a+b+1=0$ و $2a+b=0$.

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $a=1$ و $b=-2$. ◇

مثال (٨)[AMC12B 2003] إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود خطية (من الدرجة الأولى) حيث $f(6)-f(2)=12$. جد $f(12)-f(2)$.

الحل

لنفرض أن $f(x)=ax+b$. عندئذ،

$$f(6)-f(2)=(6a+b)-(2a+b)=4a$$

من ذلك نرى أن $4a = 12$. إذن $a = 3$. وبهذا فإن $f(x) = 3x + b$. الآن،

$f(12) - f(2) = (3 \times 12 + b) - (3 \times 2 + b) = 36 - 6 = 30$. ◇

مثال (٩)[AMC122000] ما هو باقي قسمة $x^{51} + 51$ على $x + 1$.

الحل

باستخدام مبرهنة العامل الخطي نجد أن باقي القسمة هو

$f(-1) = (-1)^{51} + 51 = -1 + 51 = 50$. ◇

مثال (١٠)[AMC12 2001] لنفرض أن $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

إذا علمت أن $P(0) = 2$ وأن متوسط أصفار $P(x)$ يساوي حاصل ضرب أصفار $P(x)$ وهذا أيضاً يساوي مجموع معاملات $P(x)$ فجد a، b، c .

الحل

بما أن $P(0) = 2$ فإن $c = 2$. الآن، مجموع الأصفار هو $-a$. إذن متوسطها هو $-\frac{a}{3}$. حاصل ضرب الأصفار هو $-c$. إذن، $-\frac{a}{3} = -c$. وبهذا فإن $a = 3c = 6$. مجموع المعاملات هو $1 + a + b + c = -c$. إذن، $1 + 6 + b + 2 = -2$. ومن ذلك نجد أن $b = -11$. ◇

مثال (١١)[AHSME 1960] إذا كان $x^2 + 2x + 5$ قاسماً لكثيرة الحدود $x^4 + px^2 + q$ فجد كلاً من p و q .

الحل الأول

لنفرض أن العامل الآخر هو $x^2 + ax + b$. عندئذ،

$$\left(x^2 + 2x + 5\right)\left(x^2 + ax + b\right) = x^4 + px^2 + 9$$
$$x^4 + (2 + a)x^3 + (5 + b + 2a)x^2 + (5a + 2b)x + 5b = x^4 + px^2 + q$$

بمقارنة المعاملات نجد أن

$$2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$$
$$5a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{5a}{2} = +5$$
$$p = 5 + b + 2a = 5 + 5 - 4 = 6$$
$$. \ q = 5b = 5 \times 5 = 25$$

الحل الثاني

بقسمة $x^4 + px^2 + q$ على $x^2 + 2x + 5$ نحصل على

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x + (p-1) \\
\hline
x^2 + 2x + 5 & x^4 \qquad\qquad + px^2 \qquad + q \\
 & x^4 + 2x^3 \qquad + 5x^2 \\
\hline
 & -2x^3 + (p-5)x^2 \qquad + q \\
 & -2x^3 - 4x^2 \qquad - 10x \\
\hline
 & (p-1)x^2 \quad + 10x \quad + q \\
 & (p-1)x^2 + 2(p-1)x + 5(p-1) \\
\hline
 & (12-2p)x + (q-5p+5)
\end{array}$$

إذن، الباقي $0 = (12 - 2p)x + (q - 5p + 5)$. من ذلك نجد أن

$$12 - 2p = 0 \Rightarrow p = 6$$
$$q - 5p + 5 = 0 \Rightarrow q = 5p - 5 = 30 - 5 = 25$$

الحل الثالث

ضع $y = x^2$. عندئذ، $x^4 + px^2 + q = y^2 + py + q$.

لنفرض أن جذري $y^2 + py + q = 0$ هما r^2 و s^2 . عندئذ، جذور $x^4 + px^2 + q = 0$ هي $\pm r$ و $\pm s$ (لأن $y = x^2$). الآن، بما أن

$x^2+2x+5=0$ قاسم فإن الجذرين r و s يحققان المعادلة. وبهذا فالجذران $-r$ و $-s$ يحققان المعادلة. من ذلك نجد أن $x^2-2x+5=0$ ويكون القاسم الآخر هو x^2-2x+5. الآن،

$$\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2-2x+5\right)=x^4+px^2+q$$
$$x^4+6x^2+25=x^4+px^2+q$$

ويكون $p=6$ و $q=25$. ◇

مثال (١٢) إذا كانت $f(x)=ax^3+bx-7$ وكان $f(5)=3$ فجد $f(-5)$.

الحل

$$f(5)=5^3a+5b-7 \Rightarrow 5^3a+5b=10$$

الآن،

$$f(-5)=-5^3a-5b-7=-\left(5^3a+5b\right)-7=-10-7=-17$$. ◇

مثال (١٣)[MAΘ 1991] إذا كان $c\neq 0$ و $d\neq 0$ وكانت جذور المعادلة $4x^3-12x^2+cx+d=0$ هي α_1، α_2، α_3 حيث $\alpha_1+\alpha_2=0$ فجد قيمة $\frac{d}{c}$.

الحل

لاحظ أن

$$\begin{aligned}4\left(x^3-3x^2+\frac{c}{4}x+\frac{d}{4}\right)&=4\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)\left(x-\alpha_3\right)\\&=4\left(x^2-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)x+\alpha_1\alpha_2\right)\left(x-\alpha_3\right)\\&=4\left(x^2+\alpha_1\alpha_2\right)\left(x-\alpha_3\right)\\&=4\left(x^3-\alpha_3x^2+\alpha_1\alpha_2x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)\end{aligned}$$

بمقارنة المعاملات نجد أن $\alpha_3 = 3$ و $\alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{4}$ و $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{12}$.

إذن، $-\frac{d}{12} = \frac{c}{4}$. أي أن $d = -3c$.

وبهذا نجد أن $\frac{d}{c} = -3$. ◇

مثال (١٤) ما باقي قسمة $f(x) = x^{90}$ على $x^2 - 3x + 2$.

الحل

لنفرض أن $r(x) = ax + b$ هو باقي قسمة $f(x)$ على $x^2 - 3x + 2$ وأن $q(x)$ هو خارج القسمة. عندئذ،

$$\begin{aligned} f(x) = x^{90} &= \left(x^2 - 3x + 2\right)q(x) + (ax + b) \\ &= (x-1)(x-2)q(x) + (ax + b) \end{aligned}$$

الآن،

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 = 0 + a + b \\ f(2) &= 2^{90} = 0 + 2a + b \end{aligned}$$

من ذلك نجد أن

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 2^{90} \end{aligned}$$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية نجد أن $a = 2^{90} - 1$. وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن $b = 2 - 2^{90}$. إذن، $r(x) = \left(2^{90} - 1\right)x + \left(2 - 2^{90}\right)$. ◇

(٤.٤) تحليل كثيرات الحدود [Factorization of Polynomials]

نعني بتحليل كثيرة حدود، كتابتها كحاصل ضرب كثيرات حدود من الدرجة الأولى وكثيرات حدود من الدرجة الثانية ليس لها جذور حقيقية (أي أن مميزها

سالب). من الناحية النظرية تضمن لها المبرهنة الأساسية في الجبر إمكانية ذلك. ولكن لا توجد طريقة عامة لإنجاز ذلك عملياً. ولهذا يتطلب تحليل كثيرات الحدود بعض الحنكة والكثير من التدريب. وإضافة إلى طرق تحليل صيغ الدرجة الثانية فالقواعد التالية تساعد كثيراً.

(١) **تحليل فرق بين مربعين:**

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

(٢) **تحليل فرق بين مكعبين:**

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

(٣) **تحليل مجموع مكعبين:**

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$$

مثال (١٥) حلل كثيرة الحدود $6x^4 + 3x^3 + 3x^2$.

الحل

$$6x^4 + 3x^3 + 3x^2 = 3x^2\left(2x^2 + x + 1\right)$$

وبما أن مميز $2x^2 + x + 1$ هو $1 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$.

فالتحليل أعلاه هو التحليل المطلوب. ◇

مثال (١٦) حلل كثيرة الحدود $x^{12} - 2^{12}$.

الحل

$$\begin{aligned} x^{12} - 2^{12} &= \left(x^6 - 2^6\right)\left(x^6 + 2^6\right) \\ &= \left(x^3 - 2^3\right)\left(x^3 + 2^3\right)\left(x^2 + 2^2\right)\left(x^4 - 4x^2 + 16\right) \\ &= (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right) \\ &\quad \left(x^2 + 4\right)\left(x^4 - 4x^2 + 16\right) \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 16 &= x^4 + 8x^2 + 16 - 12x^2 \\ &= \left(x^2 + 4\right)^2 - 12x^2 \\ &= \left(x^2 + 4 - \sqrt{12}x\right)\left(x^2 + 4 + \sqrt{12}x\right) \end{aligned}$$

ويكون التحليل هو

$$(x-2)\left(x^2+2x+4\right)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2+4-\sqrt{12}x\right)\left(x^2+4+\sqrt{12}x\right).$$

◇

مثال (١٧) حلل $x^4 + 324$.

الحل

لاحظ أن

$$\begin{aligned} x^4 + 324 &= x^4 + 4\times 81 = x^4 + 4\times 3^4 \\ &= x^4 + 36x^2 + 4\times 81 - 36x^2 \\ &= \left(x^2 + 18\right)^2 - 36x^2 \\ &= \left(x^2 + 18 - 6x\right)\left(x^2 + 18 + 6x\right) \end{aligned}$$

ومميز كل من $x^2 + 6x + 18$ و $x^2 - 6x + 18$ سالب. ◇

مثال (١٨) حلل كثيرة الحدود $x^4 + x^2 + 1$.

الحل

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 \\ &= \left(x^2 + 1 - x\right)\left(x^2 + 1 + x\right) \end{aligned}$$

ومميز كل من $x^2 + x + 1$ و $x^2 - x + 1$ سالب. ◇

مثال (١٩) أثبت أن x^2+x+1 قاسم لكثيرة الحدود x^5+x^4+1 .

الحل

باستخدام القسمة المطولة نحصل على

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - x + 1 \\
\hline
x^2+x+1 & x^5 + x^4 \qquad\qquad + 1 \\
 & x^5 + x^4 + x^3 \\
\hline
 & \qquad - x^3 \qquad + 1 \\
 & \qquad - x^3 - x^2 - x \\
\hline
 & \qquad\qquad x^2 + x + 1 \\
 & \qquad\qquad x^2 + x + 1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

إذن، $\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right) = x^5+x^4+1$.

هل تستطيع تحليل x^3-x+1 (حاول ذلك) ؟ ◇

مثال (٢٠) حل المعادلة $x(x+1)(x+2)(x+3)=63$

الحل

لاحظ أن المعادلة تكافئ $\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+3x\right)-63=0$.

بوضع $y=x^2+3x$ نجد أن

$$
\begin{aligned}
(y+2)y-63&=0\\
y^2+2y-63&=0\\
(y-7)(y+9)&=0
\end{aligned}
$$

إذن، $y=7$ أو $y=-9$.

إذا كان $y=-9$ فنجد أن $x^2+3x+9=0$ ومميز هذه المعادلة هو $0>27-=36-9$ ومن ثم ليس لها جذور حقيقية.أما إذا كان $y=7$ فنرى أن $x^2+3x-7=0$. وباستخدام القانون العام نجد أن

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+28}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{37}}{2}$$

إذن، $x_1=\frac{-3+\sqrt{37}}{2}$ و$x_2=\frac{-3-\sqrt{37}}{2}$. ◇

مثال (٢١) حلل كثيرة الحدود x^9+x^4-x-1 إذا علمت أن x^2+x+1 قاسماً لكثيرة الحدود x^5+x+1 .

الحل

$$\begin{aligned} x^9+x^4-x-1&=\left(x^9-x\right)+\left(x^4-1\right)\\ &=x\left(x^8-1\right)+\left(x^4-1\right)\\ &=x\left(x^4-1\right)\left(x^4+1\right)+\left(x^4-1\right)\\ &=\left(x^4-1\right)\left(x^5+x+1\right)\end{aligned}$$

الآن x^2+x+1 قاسم لكثيرة الحدود x^5+x+1 . ولذا بقسمة x^5+x+1 على x^2+x+1 نجد أن خارج القسمة هو x^3-x^2+1 .

إذن، التحليل المطلوب هو

$$(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right).$$ ◇

(٤.٥) مسائل محلولة

(١) إذا كانت $f(x) = ax^2 + x + 1$ وكان $f(2) = 10$ فما قيمة a ؟

أ) $\frac{5}{4}$ ب) $\frac{7}{4}$ ج) $\frac{13}{4}$ د) $\frac{15}{4}$

(٢) إذا كانت $f(x) = 4x^3 + 8x^2 + 6x + 5$ وكانت $g(x) = x^2 - 3x + 1$ فإن $4f(1) + 5g(5)$ تساوي

أ) 145 ب) 146 ج) 147 د) 148

(٣) [AMC10A2002] مجموع أصفار كثيرة الحدود $(2x+3)(x-4) + (2x+3)(x-6)$ هو

أ) $\frac{7}{2}$ ب) 4 ج) 5 د) 7

(٤) [AHSME 1965] إذا كانت $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 3$ قاسماً لكثيرة الحدود $g(x) = x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ فإن قيمة $(p+q)r$ تساوي

أ) -18 ب) 12 ج) 15 د) 27

(٥) لتكن $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$. أي من كثيرات الحدود التالية قاسم لكثيرة الحدود $f(x)$ ؟

أ) $x+1$ ب) $x-1$ ج) x^2-1 د) $x+2$

(٦) إذا قبلت $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ القسمة على $g(x) = x^2 + x + 2$ فإن $a - b$ يساوي

أ) -1 ب) 0 ج) 1 د) 2

(٧) إذا كان $81x^4 - 16 = \left(ax^2 + b\right)(cx+d)(ex+f)$ فإن

$a-b+c+d-e+f$ يساوي

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 3 (د) 5

(٨) إذا كان $6x^4-3x^3-4x^2+x=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
فإن $a+b+c+d$ يساوي

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) 2 (د) $3\sqrt{33}$

(٩) مجموع الجذور الحقيقة لكثيرة الحدود x^4-10x^2+9 هو

(أ) 0 (ب) 3 (ج) 6 (د) 7

(١٠) خارج قسمة $x^4+x^3-7x^2+13x+4$ على x^2+4x+1 هو

(أ) x^2-3x+4 (ب) x^2+3x+4

(ج) x^2+3x-4 (د) x^2-3x-4

(١١) إذا كان $x^4-3x^3-x+3=\left(x^2+x+a\right)(x+b)(x+c)$ فإن
abc يساوي

(أ) -3 (ب) -1 (ج) 1 (د) 3

(١٢) إذا كان $x^6-x^4-x^2+1=\left(ax^2+bx+c\right)(x+1)^2(x-1)^2$
فإن abc يساوي

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١٣) [AHSME 1950] باقي قسمة $x^{13}+1$ على $x-1$ يساوي

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١٤) [MAΘ 1991] مجموع قيم m التي تجعل $x+2$ قاسماً لكثيرة الحدود
$f(x)=x^3+3m^2x^2+mx+4$ هو

(أ) $-\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$

(١٥) لنفرض أن جذور كثيرة الحدود $x^3 + px^2 + 4$ هي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ حيث $\alpha_1 = \alpha_2$. ما قيمة p ؟

(أ) -3 (ب) 0 (ج) 3 (د) 4

(١٦) [AMC10A 2010] إذا كانت الجذور الثلاثة لكثيرة الحدود $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2010$ أعداداً صحيحة موجبة فما أصغر قيمة للعدد a ؟

(أ) 78 (ب) 88 (ج) 98 (د) 108

(١٧) إذا كانت جميع جذور كثيرة الحدود

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 87x + k = 0$$

أعداداً أولية فما عدد القيم الممكنة للعدد k ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١٨) [AHSME 1982] إذا كانت $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$ وكان $f(-7) = 7$ فما قيمة $f(7)$ ؟

(أ) -19 (ب) -17 (ج) 17 (د) 19

(١٩) إذا كان $p \neq 0$ و $q \neq 0$ وكانت α_1 ، α_2 ، α_3 هي جذور المعادلة $x^3 + px^2 + qx + 15 = 0$ حيث $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ فما قيمة pq ؟

(أ) -15 (ب) -12 (ج) 12 (د) 15

(٢٠) إذا كان باقي قسمة $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ على $x - 3$ هو 6 فما باقي قسمة $f(x)$ على $x^2 - 9$ ؟

(أ) $2x$ (ب) $2x-1$ (ج) $2x+1$ (د) $3x$

(٢١) [AHSME 1979] لنفرض أن $q_1(x)$ و r_1 هما خارج القسمة والباقي عند قسمة x^8 على $x+\frac{1}{2}$. ولنفرض أن $q_2(x)$ و r_2 هما خارج القسمة والباقي عند قسمة $q_1(x)$ على $x+\frac{1}{2}$ فما قيمة r_2 ؟

(أ) $-\frac{1}{16}$ (ب) $-\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{1}{16}$ (د) $\frac{1}{8}$.

(٢٢) [M and IQ3] مجموع جذور المعادلة

$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = -1$$ هو

(أ) -15 (ب) -10 (ج) 10 (د) 15

(٢٣) ما باقي قسمة $f(x) = x^{51} - 1$ على $x^2 - 1$ ؟

(أ) $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ (ب) $x-1$ (ج) $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (د) $x+1$

(٢٤) أحد جذور المعادلة $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$ يساوي مجموع الجذرين الآخرين. ما الجذر الأصغر ؟

(أ) -2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 8

(٢٥) إذا كان -1 و 1 جذرين للمعادلة

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12 = 0$$

فما مجموع الجذرين الآخرين ؟

(أ) 7 (ب) 9 (ج) 10 (د) 11

(٢٦) العدد 7 هو أحد جذور كثيرة الحدود

$$f(x) = 3x^3 - 14x^2 - 55x + 42 \text{ .}$$

إذا كان α و β هما الجذران الآخران، فما قيمة المقدار $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$ ؟

(أ) $-\frac{7}{6}$ (ب) $-\frac{7}{3}$ (ج) $\frac{7}{6}$ (د) $\frac{7}{3}$

(٢٧) لتكن $f\left(\frac{x}{5}\right)=2x^2+x+3$. ما حاصل ضرب قيم x التي تحقق $f(5x)=253$ ؟

(أ) $-\frac{1}{10}$ (ب) 0 (ج) 10 (د) 20

(٢٨) ما مجموع مربعات جذور المعادلة

$x^3+3x^2-7x+1=0$ ؟

(أ) 10 (ب) 13 (ج) 19 (د) 23

(٢٩) ما عدد الجذور الحقيقية للمعادلة

$2x^5+4x^3+2x=0$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 3 (د) 5

(٣٠) لنفرض أن $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $f(6)-f(2)=12$ و $f(8)-f(4)=16$. ما قيمة $f(12)-f(2)$ ؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 35 (د) 45

(٤.٦) حلول المسائل

(١) الإجابة هي (ب): لدينا

$$10 = f(2) = a \times (2)^2 + 2 + 1 = 4a + 3$$

إذن، $4a = 7$. أي أن $a = \frac{7}{4}$.

(٢) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$4f(1) = 4\left(4 \times 1^3 + 8 \times 1^2 + 6 \times 1 + 5\right) = 4 \times 23 = 92$$
$$5g(5) = 5\left(5^2 - 3 \times 5 + 1\right) = 5 \times 11 = 55$$

إذن، $4f(1) + 5g(5) = 92 + 55 = 147$.

(٣) الإجابة هي (أ):

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-4) + (2x+3)(x-6) &= (2x+3)(x-4+x-6) \\ &= (2x+3)(2x-10)\end{aligned}$$

وأصفارها هي $x_1 = 5$ و $x_2 = -\frac{3}{2}$. إذن، $x_1 + x_2 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

(٤) الإجابة هي (ج): بما أن درجة $f(x)$ تساوي 3 ودرجة $g(x)$ تساوي 4 وأن $g(x)$ واحدية فإن

$$\begin{aligned}g(x) &= (x+b)\left(x^3 + 3x^2 + 9x + 3\right) \\ &= x^4 + (3+b)x^3 + (9+3b)x^2 + (3+9b)x + 3b\end{aligned}$$

بمقارنة المعاملات نجد أن

$$\begin{aligned}&3 + b = 4 \Rightarrow b = 1 \\ &9 + 3b = 6p \Rightarrow 6p = 12 \Rightarrow p = 2 \\ &3 + 9b = 4q \Rightarrow 4q = 12 \Rightarrow q = 3 \\ &3b = r \Rightarrow r = 3\end{aligned}$$

إذن، $(p+q)r = (2+3) \times 3 = 15$.

حل آخر: بقسمة $g(x)$ على $f(x)$ نحصل على

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\
\hline
x^3+3x^2+9x+3 & x^4+4x^3+6px^2+4qx+r \\
 & x^4+3x^3+9x^2\ \ +3x \\
\hline
 & \quad x^3+(6p-9)x^2+(4q-3)x+r \\
 & \quad x^3+\quad 3x^2 \quad + \quad 9x \quad +3 \\
\hline
 & \quad (6p-12)x^2+(4q-12)x+(r-3)
\end{array}
$$

إذن، باقي القسمة $(6p-12)x^2+(4q-12)+(r-3)=0$

ومن ذلك نجد أن

$$
\begin{aligned}
r-3=0 &\Rightarrow r=3 \\
4q-12=0 &\Rightarrow q=3 \\
6p-12=0 &\Rightarrow p=2
\end{aligned}
$$

وبهذا يكون $(p+q)r=(2+3)\times 3=15$.

(٥) الإجابة هي (ب): لاحظ أن

$$
\begin{aligned}
f(-1) &= 3(-1)^3-2(-1)^2-1=-6\neq 0 \\
f(1) &= 3\times 1^3-2\times 1^2-1=0 \\
f(-2) &= 3\times(-2)^3-2\times(-2)^2-1=-33\neq 0
\end{aligned}
$$

إذن، $x-1$ قاسم. $x+1$ ليست قاسم وبالتالي

$x^2-1=(x-1)(x+1)$ ليست قاسم. كذلك $x+2$ ليست قاسم.

(٦) الإجابة هي (ج): بما أن $f(x)$ واحدية وتقبل القسمة على $g(x)$ فإن

$$f(x)=(x+c)g(x)$$

$$x^3+2x^2+ax+b=(x+c)\left(x^2+x+2\right)$$
$$=x^3+(c+1)x^2+(c+2)x+2c$$

وبمقارنة المعاملات نجد أن

$$c+1=2\Rightarrow c=1$$
$$c+2=a\Rightarrow a=3$$
$$b=2c\Rightarrow b=2$$

إذن، $a-b=3-2=1$.

(٧) الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$81x^4-16=\left(9x^2+4\right)(3x+2)(3x-2)$$

إذن،

$$a-b+c+d-e+f=9-4+3+2-3-2=5 \text{ .}$$

(٨) الإجابة هي (أ): بتحليل المقدار نجد أن

$$6x^4-3x^3-4x^2+x=$$
$$x(x-1)\left(x-\frac{-3+\sqrt{33}}{12}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{33}}{12}\right)$$

إذن،

$$a+b+c+d=0+1+\frac{-3+\sqrt{33}}{12}+\frac{-3-\sqrt{33}}{12}$$
$$=1-\frac{3}{12}-\frac{3}{12}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(٩) الإجابة هي (أ):

$$x^4-10x^2+9=\left(x^2-9\right)\left(x^2-1\right)$$
$$=(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)$$

إذن، الجذور الحقيقية هي $x_1=3$ ، $x_2=-3$ ، $x_3=1$ ، $x_4=-1$

ومجموعها يساوي 0.

(١٠) الإجابة هي (أ): بالقسمة المطولة نجد أن

$$x^4 + x^3 - 7x^2 + 13x + 4 = \left(x^2 + 4x + 1\right)\left(x^2 - 3x + 4\right).$$

(١١) الإجابة هي (د): بتحليل كثيرة الحدود نجد أن

$$x^4 - 3x^3 - x + 3 = (x-3)(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$$

وبهذا فإن $a = 1$ ، $b = -1$ ، $c = -3$. ويكون

$$abc = 1 \times (-1) \times (-3) = 3.$$

(١٢) الإجابة هي (أ): بتحليل كثيرة الحدود نجد أن

$$x^6 - x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 + 1\right)(x+1)^2(x-1)^2$$

ولذا فإن $a = c = 1$ و $b = 0$. ويكون $abc = 0$.

(١٣) الإجابة هي (ج): الباقي هو $f(1) = 1^{13} + 1 = 1 + 1 = 2$.

(١٤) الإجابة هي (ب): $x + 2$ قاسماً عندما يكون $f(-2) = 0$. إذن،

$$-8 + 12m^2 - 2m + 4 = 0$$
$$12m^2 - 2m - 4 = 0$$
$$6m^2 - m - 2 = 0$$

وبهذا فإن

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2) \times 6}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

إذن، $m_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3}$ و $m_2 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$. وبهذا يكون

$$m_1 + m_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

(١٥) الإجابة هي (أ): من علاقات فــيتاي لدينا

(١) $$-p = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_3$$

(٢) $$4 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\alpha_1^2\alpha_3$$

(٣) $$0 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_1 + 2\alpha_3)$$

إذن، $\alpha_1 = 0$ أو $\alpha_1 = -2\alpha_3$.

إذا كان $\alpha_1 = 0$ فإن $4 = 0$ وهذا مستحيل.

إذن، $\alpha_1 = -2\alpha_3$. بالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن $4 = -4\alpha_3^3$. إذن، $\alpha_3^3 = -1$. وهذا فإن $\alpha_3 = -1$. ومن ذلك نجد أن $\alpha_1 = 2$. إذن، $p = -2\alpha_1 - \alpha_3 = -4 + 1 = -3$.

(١٦) الإجابة هي (أ): لنفرض أن الجذور هي α، β، γ. من علاقات ڤيتاي لدينا

$$\alpha + \beta + \gamma = a$$
$$\gamma\beta\alpha = 2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$$

وبما أن عدد الجذور يساوي 3 فيجب أن يكون أحد الجذور هو حاصل ضرب زوج من الأعداد الأولية 2، 3، 5، 67. ولكي نحصل على مجموع $\alpha + \beta + \gamma = a$ أصغري فيجب أن يكون زوج الأعداد الأولية التي نضربهما هما 2 و 3 لنحصل على جذر $6 = 2 \times 3$. ومن ثم فالجذرين الآخرين هما 5 و 67 ونحصل على $a = 6 + 5 + 67 = 78$.

(١٧) الإجابة هي (ب): القيمة الوحيدة الممكنة هي $k = 110$. لنفرض أن α، β، γ هي جذور كثيرة الحدود. من علاقات ڤيتاي لدينا

$$\alpha + \beta + \gamma = 18$$
$$\alpha\beta\gamma = -k$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 87$$

بما أن α، β، γ أعداد أولية فيجب أن يكون أحدها يساوي 2وليكن $\alpha = 2$ (لأنها لو كانت جميعاً فردية لكان $\alpha + \beta + \gamma$ عدداً فردياً وهذا مستحيل). إذن،

$$\beta + \gamma = 16 = 3 + 13 = 5 + 11$$

هما الخياران الآخران الوحيدان.إذا كان $\beta = 3$ و $\gamma = 13$ فنجد أن

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \times 3 + 3 \times 13 + 13 \times 2 = 71$$

وهذا مستحيل.إذن، $\beta = 5$ و $\gamma = 11$. ويكون

$$k = 2 \times 5 \times 11 = 110 .$$

(١٨) الإجابة هي (ب): لدينا

$$\begin{aligned} & f(-7) = -7^7 \times a - 7^3 \times b - 7c - 5 = 7 \\ & \Rightarrow 7^7 \times a + 7^3 \times b + 7c = -12 \end{aligned}$$

إذن،

$$f(7) = 7^7 \times a + 7^3 \times b + 7c - 5 = -12 - 5 = -17 .$$

(١٩) الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + 15 &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \\ &= \left(x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_3\right)(x - \alpha_3) \\ &= \left(x^2 + \alpha_1\alpha_3\right)(x - \alpha_3) \\ &= x^3 - \alpha_3 x^2 + \alpha_1\alpha_2 x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

بمقارنة المعاملات نجد أن $p = -\alpha_3$ و $q = \alpha_1\alpha_2$ و$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = +15$.

إذن،

$$pq = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 15 .$$

(٢٠) الإجابة هي (أ): بقسمة $f(x)$ على $x^2 - 9$ نجد أن

. $f(x) = (x-3)(x+3)q(x) + r(x)$

الآن،

$$\begin{aligned} f(-3) &= -3^5 \times a - 3^3 \times b - 3c \\ &= -\left(3^5 \times a + 3^3 \times b + 3c\right) \\ &= -f(3) = -6 \end{aligned}$$

إذن،

$$\begin{aligned} 6 &= f(3) = r(3) \\ -6 &= f(-3) = r(-3) \end{aligned}$$

ولكن $\deg r(x) < 2$. إذن، $r(x) = ax + b$.الآن،

$$\begin{aligned} r(3) = 6 \quad &\Rightarrow \quad 3a + b = 6 \\ r(-3) = -6 \quad &\Rightarrow \quad -3a + b = -6 \end{aligned}$$

من ذلك، نجد أن $6a = 12$. أي أن $a = 2$. وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن $b = 0$.إذن، $r(x) = 2x$.

(**٢١**) الإجابة هي (أ): لنفرض أن $f(x) = x^8$. عندئذ،

$$f(x) = x^8 = \left(x + \frac{1}{2}\right)q_1(x) + r_1$$

ولكن $r_1 = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$.

إذن، $f(x) = x^8 = \left(x + \frac{1}{2}\right)q_1(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^8$.من ذلك نجد

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{2}\right)q_1(x) &= x^8 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(x^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \end{aligned}$$

وبهذا نجد أن $q_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(x^4 + \frac{1}{16}\right)$.

ويكون $r_2 = q_1\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16}$.

(٢٢) الإجابة هي (ب): لاحظ أن المعادلة تكافئ

$$\left(x^2 + 5x + 4\right)\left(x^2 + 5x + 6\right) + 1 = 0$$

بوضع $y = x^2 + 5x$ نجد أن

$$(y + 4)(y + 6) + 1 = 0$$
$$y^2 + 10y + 25 = 0$$
$$(y + 5)^2 = 0$$

إذن، $y_1 = y_2 = -5$. بالتعويض في المعادلة $y = x^2 + 5x$ نجد أن

$$x^2 + 5x + 5 = 0$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ولذا فالجذور الأربعة للمعادلة الأصلية هي

$$x_1 = x_2 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x_3 = x_4 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}$$

ويكون $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -5 + \sqrt{5} - 5 - \sqrt{5} = -10$.

(٢٣) الإجابة هي (ب): لاحظ أن

$f(x) = \left(x^2 - 1\right)q(x) + r(x)$ حيث $r(x) = ax + b$. الآن،

$$f(1) = r(1) = a + b$$
$$f(-1) = r(-1) = -a + b$$

ولكن $f(1) = 1^{51} - 1 = 0$ و $f(-1) = (-1)^{51} - 1 = -2$. إذن،

$$a + b = 0$$
$$-a + b = -2$$

ومن ذلك نجد أن $b = -1$ و $a = 1$. ويكون $r(x) = x - 1$.

(٢٤) الإجابة هي (أ): نفرض أن الجذور هي α، β، γ وأن $\gamma = \beta + \alpha$.

من علاقات ڤـيتاي لدينا

$$\alpha + \beta + \gamma = -(-6) = 6$$
$$\alpha\beta\gamma = -30$$

من ذلك نجد أن $2\gamma = 6$. أي أن $\gamma = 3$. وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن $\beta = -\frac{10}{\alpha}$. إذن،

$$\alpha - \frac{10}{\alpha} + 3 = 6$$
$$\alpha - \frac{10}{\alpha} - 3 = 0$$
$$\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0$$
$$(\alpha - 5)(\alpha + 2) = 0$$

إذن، $\alpha = -2$ أو $\alpha = 5$. وفي كلا الحالتين نجد أن الجذور هي $-2, 3, 5$ وأصغرها هو -2. لاحظ أن $\alpha \neq 0$ (لأنه لو كان $\alpha = 0$ فسنجد أن $-30 = 0$ وهذا مستحيل).

(٢٥) الإجابة هي (أ): كل من $x - 1$ و $x + 1$ قاسم لكثيرة الحدود $f(x)$ ومن ثم فإن $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ قاسماً لكثيرة الحدود $f(x)$. بقسمة $f(x)$ على $x^2 - 1$ نجد

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 7x + 12\right) \\ &= \left(x^2 - 1\right)(x - 3)(x - 4) \end{aligned}$$

ويكون الجذران الآخران هما 3 و 4 ومجموعهما يساوي 7.

(٢٦) الإجابة هي (ج):

الحل الأول: إذا كان $\frac{p}{q}$ جذراً كسرياً لكثيرة الحدود $f(x)$ فإن p قاسماً للعدد 42 وأن q قاسماً للعدد 3 . وبتجريب هذه القواسم نجد أن $\alpha = \frac{2}{3}$ و $\beta = -3$ هما الجذران الآخران. وبهذا يكون

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6}$$

الحل الثاني: بما أن 7 هو جذراً لكثيرة الحدود فإن $x - 7$ قاسماً. وبقسمة $f(x)$ على $x - 7$ نجد أن

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-7)\left(3x^2 + 7x - 6\right) \\ &= (x-7)(3x-2)(x+3) \end{aligned}$$

وبهذا يكون الجذران الآخران هما $\alpha = \frac{2}{3}$ و $\beta = -3$.

الحل الثالث: باستخدام علاقات فـيتاي نرى أن

$$\begin{aligned} 7 + \alpha + \beta = \frac{14}{3} \quad &\Rightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{14}{3} - 7 = -\frac{7}{3} \\ 7\alpha\beta = -\frac{42}{3} \quad &\Rightarrow \quad \alpha\beta = -2 \end{aligned}$$

إذن، $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-7/3}{-2} = \frac{7}{6}$.

(٢٧) الإجابة هي (أ): لدينا

$$f\left(\frac{x}{5}\right) = 2x^2 + x + 3 = 50\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{5}\right) + 3$$

إذن،

$$\begin{aligned} f(x) &= 50x^2 + 5x + 3 \\ f(5x) &= 1250x^2 + 25x + 3 \end{aligned}$$

$$253 = 2500x^2 + 25x + 3$$
$$2500x^2 + 25x - 250 = 0$$
$$100x^2 + x - 10 = 0$$

من علاقات فــيتاي نجد أن حاصل ضرب الجذران هو $-\frac{1}{10} = -\frac{10}{100}$.

(٢٨) الإجابة هي (د): نفرض أن α، β، γ هي جذور المعادلة . من علاقات فــيتاي لدينا

$$\alpha + \beta + \gamma = -3$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7$$

من ذلك نجد أن

$$9 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

وبهذا نجد أن

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9 - 2 \times (-7) = 23 \,.$$

(٢٩) الإجابة هي (ب): بتحليل كثيرة الحدود نجد أن

$$2x^5 + 4x^3 + 2x = 2x\left(x^4 + x + 1\right)$$

إذن، $x = 0$ هو أحد الجذور. الآن

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$$
$$= \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2$$
$$= \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$$

ومميز كل من $x^2 + x + 1$ $x^2 - x + 1$ سالب. ولهذا ليس لها جذور حقيقية. إذن، الجذر الحقيقي الوحيد هو $x = 0$ وتكون الإجابة هي (ب).

(٣٠) الإجابة هي (د): لدينا

$$f(6) - f(2) = 12 \Rightarrow (36a + 6b + c) - (4a + 2b + c) = 12$$

$$\Rightarrow 32a + 4b = 12$$
$$\Rightarrow 8a + b = 3$$

أيضاً

$$\begin{aligned} f(8) - f(4) = 16 &\Rightarrow (64a + 8b + c) - (16a + 4b + c) = 16 \\ &\Rightarrow 48a + 4b = 16 \\ &\Rightarrow 12a + b = 4 \end{aligned}$$

وبحل المعادلتين نجد أن $a = \frac{1}{4}$ و $b = 1$. إذن،

$$\begin{aligned} f(12) - f(2) &= (144a + 12b + c) - (4a + 2b + c) \\ &= 140a + 10b \\ &= 140 \times \frac{1}{4} + 10 \times 1 = 35 + 10 = 45 \end{aligned}$$

وتكون الإجابة هي (د).

(٤.٧) مسائل غير محلولة

(١) [AHSME 1950] جذور المعادلة

$$\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-4x\right)=0$$ هي

(أ) 0 و 4 (ب) 1 و 2

(ج) 0 و 1 و 2 و 4 (د) 1 و 2 و 4

(٢) [AHSME 1954] المعادلة $x^3+6x^2+11x+6=0$:

(أ) ليس لها جذور حقيقية سالبة (ب) ليس لها جذور حقيقية موجبة

(ج) ليس لها جذور حقيقية (د) لها جذر موجب وجذران سالبان

(٣) [AHSME 1953] أحد قواسم x^4+4 هو:

(أ) x^2+2 (ب) $x+1$ (ج) x^2-2x+2 (د) x^2-4

(٤) [MAΘ 1990] إذا كان أحد جذور المعادلة

$$x^3-27x^2+242x-720=0$$

هو الوسط الحسابي للجذرين الآخرين فما أكبر الجذور ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25

(٥) [AHSME 1953] عدد الجذور الحقيقية للمعادلة

$$\frac{8}{x^2+4}=(2-x)$$ هو

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٦) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2$ على $x - 3$ يساوي 2 فما باقي قسمتها على $x^2 - 9$ ؟

(أ) $-\frac{2}{3}x$ (ب) $\frac{2}{3}x$ (ج) $\frac{3}{2}x$ (د) $-\frac{2}{3}x + 2$

(٧) إذا كان $x^2 - 1$ قاسماً لكثيرة الحدود $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$.

فما قيمة $a + b$ ؟

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 0 (د) 1

(٨) للمعادلة $x^4 - 6x^3 + 24x - 16 = 0$ جذران موجبان. ما مجموعهما ؟

(أ) $5 - \sqrt{13}$ (ب) 5 (ج) $5 + \sqrt{13}$ (د) $10 + \sqrt{13}$

(٩) [AMC10B 2006] إذا كان a و b جذرين المعادلة $x^2 - mx + 2 = 0$ وكان $a + \frac{1}{b}$ و $b + \frac{1}{a}$ هما جذران المعادلة $x^2 - px + q = 0$ فما قيمة q ؟

(أ) $-\frac{9}{2}$ (ب) $-\frac{7}{2}$ (ج) $\frac{7}{2}$ (د) $\frac{9}{2}$

(١٠) [AMC10A 2002] مجموع جذور المعادلة

$(2x + 3)(x - 4) + (2x + 3)(x - 6) = 0$ يساوي

(أ) $\frac{7}{2}$ (ب) 4 (ج) 7 (د) 13

(١١) مجموع الجذور الحقيقية للمعادلة

$(x + 1)^2(x + 3)(x - 1) = -4$ هو

(أ) -4 (ب) 0 (ج) $2 + \sqrt{2}$ (د) $4 + 2\sqrt{2}$

(١٢) مجموع مقلوب جذور المعادلة $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ هو

(أ) $-\frac{q}{r}$ (ب) $\frac{q}{r}$ (ج) $\frac{p}{r}$ (د) qr

(١٣) إذا كانت $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 8$ وكان $f(2) = 5$ فما قيمة $f(-2)$؟

(أ) -11 (ب) -7 (ج) 7 (د) 11

(١٤) باقي قسمة $f(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3$ على $x - 2$ يساوي 1. ما باقي قسمة $f(x)$ على $x^2 - 4$ ؟

(أ) $\frac{1}{2}x$ (ب) x (ج) $2x$ (د) $\frac{1}{2}x + 1$

(١٥) [AHSME 1951] يمكن تحليل $21x^2 + ax + 21$ إلى حاصل ضرب كثيرتي حدود من الدرجة الأولى بمعاملات صحيحة إذا كان a

(أ) عدداً فردياً (ب) عدداً زوجياً (ج) 0 (د) عدداً فردياً أكبر من 21

(١٦) [AHSME 1954] كثيرة الحدود $x^4 + 64$ تساوي

(أ) $\left(x^2 + 8\right)^2$

(ب) $\left(x^2 - 4x + 8\right)\left(x^2 - 4x - 8\right)$

(ج) $\left(x^2 - 4x + 8\right)\left(x^2 + 4x + 8\right)$

(د) $\left(x^2 + 8\right)\left(x^2 - 8\right)$

(١٧) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x + 1$ هو 3 وباقي قسمتها على $x - 3$ هو 7 فما باقي قسمتها على $x^2 - 2x + 3$؟

(أ) $5x - 3$ (ب) $x + 4$ (ج) $5x - 1$ (د) $5x$

(١٨) إذا كان 1 جذراً مضاعفاً لكثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

.

فما هو الجذر الثالث ؟

(أ) -1 (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) 0 (د) $\frac{1}{2}$

(١٩) إذا كان -1 و 2 جذرين للمعادلة $x^3 + bx + c = 0$.

فما قيمة $b - c$ ؟

(أ) -4 (ب) -3 (ج) -2 (د) -1

(٢٠) [AMC10 2000] إذا كان $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$ فما مجموع قيم x التي تحقق $f(3x) = 7$ ؟

(أ) $-\frac{1}{3}$ (ب) $-\frac{1}{9}$ (ج) 0 (د) $\frac{5}{9}$

(٢١) [AHSME 1999] إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $P(x)$ على $x - 19$ هو 99 وباقي قسمتها على $x - 99$ هو 19 فما باقي قسمتها على $(x-99)(x-19)$ ؟

(أ) $-x + 118$ (ب) $-x + 80$ (ج) $x + 80$ (د) $x + 118$

(٢٢) ما عدد الجذور الحقيقية لكثيرة الحدود $f(x) = x^4 - 3x^2 + 9$ ؟

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٢٣) ما باقي قسمة $x^{50} - 2x^{25} + 1$ على $x^2 - 1$ ؟

(أ) $-2x$ (ب) $-2x - 2$ (ج) $-2x + 2$ (د) $2x$

(٢٤) ما قيمة a التي تجعل $x - 1$ قاسماً لكثيرة الحدود $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ ؟

(أ) -1 (ب) 0 (ج) 1 (د) 2

(٢٥) للمعادلة $3x^3+2x^2-6x+1=0$ ثلاث جذور حقيقية، إثنان منهما غير كسريين. ما مجموعهما ؟

(أ) $-\frac{5}{6}$ (ب) $-\frac{5}{3}$ (ج) $\frac{5}{6}$ (د) $\frac{5}{3}$

(٢٦) [AHSME 1953] جذور المعادلة

$$x\left(x^2+8x+16\right)(4-x)=0$$ هي

(أ) 0 (ب) 0، 4 (ج) 0، -4، 4 (د) 0، -4، -4، 4

(٢٧) [AHSME 1953] قيمة m التي تجعل $f(x)=4x^2-6x+m$ تقبل القسمة على $x-3$ هي قاسم للعدد

(أ) 12 (ب) 20 (ج) 36 (د) 48

(٢٨) [AHSME 1955] أحد قواسم x^4+2x^2+9 هو

(أ) x^2-2x+3 (ب) x^2+3 (ج) $x+1$ (د) x^2-2x-3

(٢٩) [AHSME 1969] باقي قسمة x^{100} على x^2-3x+2 هو

(أ) $2^{100}-1$ (ب) $2^{100}(x-1)-(x-2)$

(ج) $x\left(2^{100}-1\right)+2\left(2^{99}-1\right)$ (د) $2^{100}(x-3)$

(٣٠) إذا كان $q_1(x)$ و r_1 هما خارج قسمة وباقي x^4 على $x+1$ وكان $q_2(x)$ و r_2 هما خارج قسمة وباقي $q_1(x)$ على $x+1$ فما قيمة r_2؟

(أ) -7 (ب) -6 (ج) -5 (د) -4

(٤.٨) إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) ب	(٣) ج	(٤) أ	(٥) ب
(٦) أ	(٧) ب	(٨) ج	(٩) د	(١٠) أ
(١١) أ	(١٢) أ	(١٣) د	(١٤) أ	(١٥) ب
(١٦) ج	(١٧) ب	(١٨) د	(١٩) د	(٢٠) ب
(٢١) أ	(٢٢) أ	(٢٣) ج	(٢٤) ج	(٢٥) ب
(٢٦) د	(٢٧) ج	(٢٨) أ	(٢٩) ب	(٣٠) د

الفصل الخامس

المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series

(٥.١) المتتابعات [Sequences]

إن إحدى المهارات الرياضية هي اكتشاف نمطاً معيناً لمجموعة أعداد ثم وصف هذا النمط. تسمى مجموعة من الأعداد التي تتبع نمط معين، متتابعة (أو متتالية) من الأعداد، كما تسمى عناصر المتتابعة بحدود (terms) المتتابعة. فمثلاً،

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

متتابعة حدها الأول هو 3، حدها الثاني هو 7، حدها الثالث هو 11 وهكذا. من الممكن وصف هذه المتتابعة على النحو التالي:

" الحد الأول للمتابعة هو 3 وكل حد من حدودها التي تلي يزيد بمقدار 4 عن الحد السابق له" وبهذا يكون الحد الخامس هو 19 والحد السادس هو 23 وهكذا.

ومن الممكن تعريف المتتابعة على النحو التالي:

تعريف

متتابعة الأعداد هي دالة مجالها الأعداد الصحيحة الموجبة. تسمى صورة العدد الصحيح n، الحد النوني (أو الحد العام) للمتابعة وعادة يرمز له بالرمز a_n.

فمثلاً، $a_1 = 3$، $a_2 = 7$، $a_3 = 11$، $a_4 = 15$ للمتابعة المقدمة أعلاه. لاحظ

أنه يمكن تعريف هذه المتتابعة على النحو التالي:

$a_1 = 3$ و $a_n = a_{n-1} + 4$ لكل $n \geq 2$.

يمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة $\{a_n\}$ وهذا يعني أن المتتابعة مولّدة باستخدام الحد العام a_n. فمثلاً، الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\{15 - (-2)^n\}$ هي:

$$15 - (-2)^1 = 17$$
$$15 - (-2)^2 = 11$$
$$15 - (-2)^3 = 23$$
$$15 - (-2)^4 = -1$$
$$15 - (-2)^5 = 47$$

(٥.٢) المتتابعات الحسابية [Arithmetic Sequences]

المتتابعة الحسابية هي متتابعة يكون الفرق بين أي حدين متتاليين عدداً ثابتاً. وبصورة أدق، نقول إن $\{a_n\}$ متتابعة حسابية إذا كان $a_{n+1} - a_n = d$ لكل عدد صحيح موجب n حيث d عدد ثابت يسمى الفرق المشترك (common difference). فمثلاً، $\{2n + 2\}$ متتابعة حسابية فرقها المشترك هو 2 لأن

$$a_{n+1} - a_n = 2(n + 1) + 2 - (2n + 2) = 2.$$

الحدود الأولى لهذه المتتابعة هي

$$4, 6, 8, 10, \ldots$$

لنفرض أن الحد الأول لمتتابعة حسابية هو a_1 وأن الفرق المشترك هو d. عندئذ،

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

وهكذا، ولذا فإن الحد العام للمتابعة هو

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال (١) أثبت أن المتتابعة $2, 9, 16, 23, 30, \ldots$ هي متتابعة حسابية وجد a_{2011} .

الحل

بما أن $9 - 2 = 16 - 9 = 23 - 16 = 30 - 23 = 7$ فإن المتتابعة حسابية فيها $a_1 = 2$ و $d = 7$. إذن،

. $a_{2011} = a_1 + 2010d = 2 + 2010 \times 7 = 14072$ ◇

ملحوظة

إذا كانت a, b, c أي ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن

$$b - a = c - b$$
$$2b = a + c$$
$$b = \frac{a+c}{2}$$

وبهذا يكون الحد الأوسط هو الوسط الحسابي (arithmetic mean) للحد الذي قبله والحد الذي يليه.

مثال (٢) إذا كانت $3k+1, k, -3$ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فجد قيمة k.

الحل

بما أن الحدود أعداد متتالية نجد أن

$$k-(3k+1)=-3-k$$
$$-2k-1=-3-k$$

وبهذا يكون $k=2$. ◇

مثال (٣) جد الحد العام a_n للمتتابعة الحسابية التي حدها الثالث يساوي 8 وحدها الثامن يساوي 17−.

الحل

بما أن $a_3=8$ فإن $a_1+2d=8$ (١)

وبما أن $a_8=-17$ فإن $a_1+7d=-17$ (٢)

وبحل المعادلتين (١) و (٢) نجد أن $d=-5$ وأن $a_1=18$. إذن،
$a_n=a_1+(n-1)d=18+(n-1)\times(-5)=23-5n$. ◇

مثال (٤) لنفرض أن $a_1, a_2, \ldots, a_k$ متتابعة حسابية تحقق

$$a_4+a_7+a_{10}=17$$
$$a_4+a_5+a_6+\ldots+a_{13}+a_{14}=77$$
$$a_k=13$$

ما هي قيمة k ؟

الحل

الإجابة هي $k=18$. لنفرض أن الحد الأول من المتتابعة هو a وأن الفرق المشترك d. عندئذ،

$$a_4+a_7+a_{10}=17 \Rightarrow (a+3d)+(a+6d)+(a+9d)=17$$
$$\Rightarrow 3a+18d=17$$

أيضاً

$$a_4 + a_5 + \cdots + a_{13} + a_{14} = 77$$
$$\Rightarrow 11a + 88d = 77$$
$$\Rightarrow a + 8d = 7$$
$$\Rightarrow a = 7 - 8d$$

وبالتعويض عن a في المعادلة $3a + 18d = 17$ نرى أن

$$3(7 - 8d) + 18d = 17$$
$$21 - 24d + 18d = 17$$
$$-6d = -4$$
$$d = \frac{2}{3}$$

ومن ذلك نجد أن $a = 7 - 8 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. الآن،

$$a_k = 13 \Leftrightarrow a + (k-1)d = 13$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} + (k-1) \times \frac{2}{3} = 13$$
$$\Leftrightarrow k - 1 = 17$$

إذن، $k = 18$. ◇

مثال (٥) أدخل أربعة أعداد بين العددين 3و 12 بحيث تكون الستة أعداد متتابعة حسابية.

الحل

لنفرض أن d هو الفرق المشترك للمتتابعة. عندئذ، الأعداد الستة هي

$3, 3+d, 3+2d, 3+3d, 3+4d, 12$.

من ذلك نرى أن

$$3 + 5d = 12$$
$$5d = 9$$
$$d = \frac{9}{5} = 1.8$$

وبهذا تكون الأعداد هي $3, 4.8, 6.6, 8.4, 10.2, 12$. ◇

(٥.٣) المتتابعات الهندسية [Geometric Sequences]

المتتابعة الهندسية هي متتابعة $\{a_n\}$ نحصل على كل من حدودها بضرب الحد الذي يسبقه بعدد غير صفري ثابت r يدعى النسبة المشتركة (common ratio).

أي أن $a_{n+1} = a_n r$ لكل عدد صحيح موجب n . على سبيل المثال

$$4, 12, 36, 108, \ldots$$

متتابعة هندسية نسبتها المشتركة تساوي 3 . كما أن

$$4, -12, 36, -108, \ldots$$

متتابعة هندسية نسبتها المشتركة تساوي -3 .

ملحوظة

إذا كانت a ، b ، c ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فنرى أن

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$$
$$b^2 = ac$$
$$b = \pm\sqrt{ac}$$

حيث $\sqrt{ac}$ هو الوسط الهندسي (geometric mean) للعددين a و c .

إذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة هندسية نسبتها المشتركة هي r فنجد أن حدود المتتابعة هي

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \ldots, a_1 r^{n-1}, \ldots$$

أي أن الحد العام للمتتابعة هو

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال (٦) المتتابعة $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ متتابعة هندسية نسبتها المشتركة هي $r = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $a_1 = 9$. ولذا فالحد العام هو

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^2 \times 3^{-n+1} = 3^{3-n}$$

وهذا يكون $a_n = 3^{3-n}$ لكل $n \geq 1$. ◇

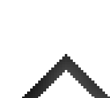
مثال (٧) إذا كانت $k, 3k, 20-k$ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فما هي قيمة k ؟

الحل

لاحظ أن

$$\begin{aligned} \frac{3k}{k} &= \frac{20-k}{3k} \\ 3 &= \frac{20-k}{3k} \\ 9k &= 20-k \\ 10k &= 20 \end{aligned}$$

إذن، $k = 2$.



مثال (٨) جد الحد العام للمتتابعة الهندسية

$$6, 6\sqrt{2}, 12, 12\sqrt{2}, \ldots$$

ثم جد أول حد تزيد قيمته عن المقدار 1400.

الحل

لدينا $a_1 = 6$ و $r = \sqrt{2}$. إذن، $a_n = 6 \times \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$.

ولإيجاد الحد الذي يزيد عن 1400 يكون المطلوب إيجاد n حيث $a_n > 1400$.

باستخدام آلة حاسبة نرى أن

$a_{15} = 768$ ، $a_{16} = 768\sqrt{2}$ ، $a_{17} = 1536$.

ومن ذلك نجد أن a_{17} هو أول حد يحقق المطلوب. ◇

ملحوظة

سندرس في الجزء الثاني من هذا الكتاب الدوال اللوغاريتمية حيث يكون باستطاعتنا استخدام مفهوم اللوغاريتمات لإيجاد حل جبري لمثل هذه المسائل.

مثال (٩) متتابعة هندسية حدها الثاني يساوي -6 وحدها الخامس يساوي 162. جد الحد العام لهذه المتتابعة.

الحل

لدينا

$$a_2 = a_1 r = -6 \qquad (١)$$

$$a_5 = a_1 r^4 = 162 \qquad (٢)$$

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١) نجد أن

$$\frac{a_1 r^4}{a_1 r} = \frac{162}{-6}$$

$$r^3 = -27$$

$$r = \sqrt[3]{-27}$$

$$r = -3$$

إذن، $a_1 = 2$ و $r = -3$ ويكون الحد العام $a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$. ◇

مثال (١٠) لدينا ثلاثة أعداد حقيقية تكون متتابعة حسابية حدها الأول يساوي 9. إذا أضفنا العدد 2 للحد الثاني وأضفنا العدد 20 للحد الثالث وأبقينا الحد الأول كما هو نحصل على متتابعة هندسية. ما هي أصغر قيمة للحد الثالث

من المتتابعة الهندسية ؟

الحل

إذا فرضنا أن d هو الفرق المشترك للمتتابعة الحسابية وأن r هو النسبة المشتركة للمتتابعة الهندسية فجد أن الحدود الثلاثة من المتتابعتين الحسابية والهندسية هي على التوالي

$$9, 9+d, 9+2d$$
$$9, 11+d, 29+2d$$

من ذلك نرى أن $9r = 11 + d$. أي أن $d = 9r - 11$.

كما أن

$$9r^2 = 29 + 2d = 29 + 2(9r - 11) = 7 + 18r \text{ .}$$

أي أن، $9r^2 - 18r - 7 = 0$. وبحل هذه المعادلة نجد أن

$$9r^2 - 18r - 7 = 0 \Leftrightarrow (3r+1)(3r-7) = 0$$
$$\Leftrightarrow r = -\frac{1}{3} \qquad \text{أو} \qquad r = \frac{7}{3}$$

إذا كان $r = -\frac{1}{3}$ فالحد الثالث من المتتابعة الهندسية هو $9r^2 = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$.

أما إذا كان $r = \frac{7}{3}$ فالحد الثالث من المتتابعة الهندسية هو $9r^2 = 9\left(\frac{7}{3}\right)^2 = 49$.

إذن، أصغر قيمة للحد الثالث من المتتابعة الهندسية هي 1. ◇

(٤ . ٥) المتسلسلات (Series)

المتسلسلة المنتهية هي مجموع حدود متتابعة

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

وسنرمز لهذا المجموع بالرمز S_n. أي أن

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

فإذا كان لدينا المتتابعة $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ فإن

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$$

ويكون

$$S_1 = 1^2 = 1$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$
$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

وهكذا.

(٥.٥) المتسلسلات الحسابية (Arithmetic Series)

تسمى المتسلسلة الناتجة عن جمع حدود متتابعة حسابية، متسلسلة حسابية. فمثلاً

$$3 + 5 + 7 + \cdots + 23 + 25$$

متسلسلة حسابية لأنها مجموع حدود المتابعة الحسابية

$$3, 5, 7, \ldots, 23, 25 .$$

لنفرض أن $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ متتابعة حسابية فرقها المشترك d. عندئذ، يمكن كتابة حدودها على الصورة

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_n - 2d, a_n - d, a_n .$$

من ذلك يكون

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

وبكتابة S_n بترتيب عكسي نجد أيضاً أن

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

وبجمع المعادلتين نرى أن

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$

حيث عدد الحدود يساوي n. إذن،

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

ويكون

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

وبما أن $a_n = a_1 + (n-1)d$ فنجد أيضاً أن

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

مثال (١١) جد مجموع $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots$ إلى 40 حداً.

الحل

هذه متسلسلة حسابية فيها $a_1 = 5$، $d = 3$، $n = 40$. إذن،

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2 \times 5 + 39 \times 3) = 20(10 + 117) = 2540 . \quad \diamond$$

مثال (١٢) جد المجموع $50 + 49\frac{1}{2} + 49 + 48\frac{1}{2} + \cdots + (-20)$.

الحل

هذه متسلسلة حسابية فيها $a_1 = 50$، $d = -\frac{1}{2}$، $a_n = -20$. الآن،

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$-20 = 50 + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-70 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

$$-70 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}n$$

$$-\frac{141}{2} = -\frac{n}{2}$$

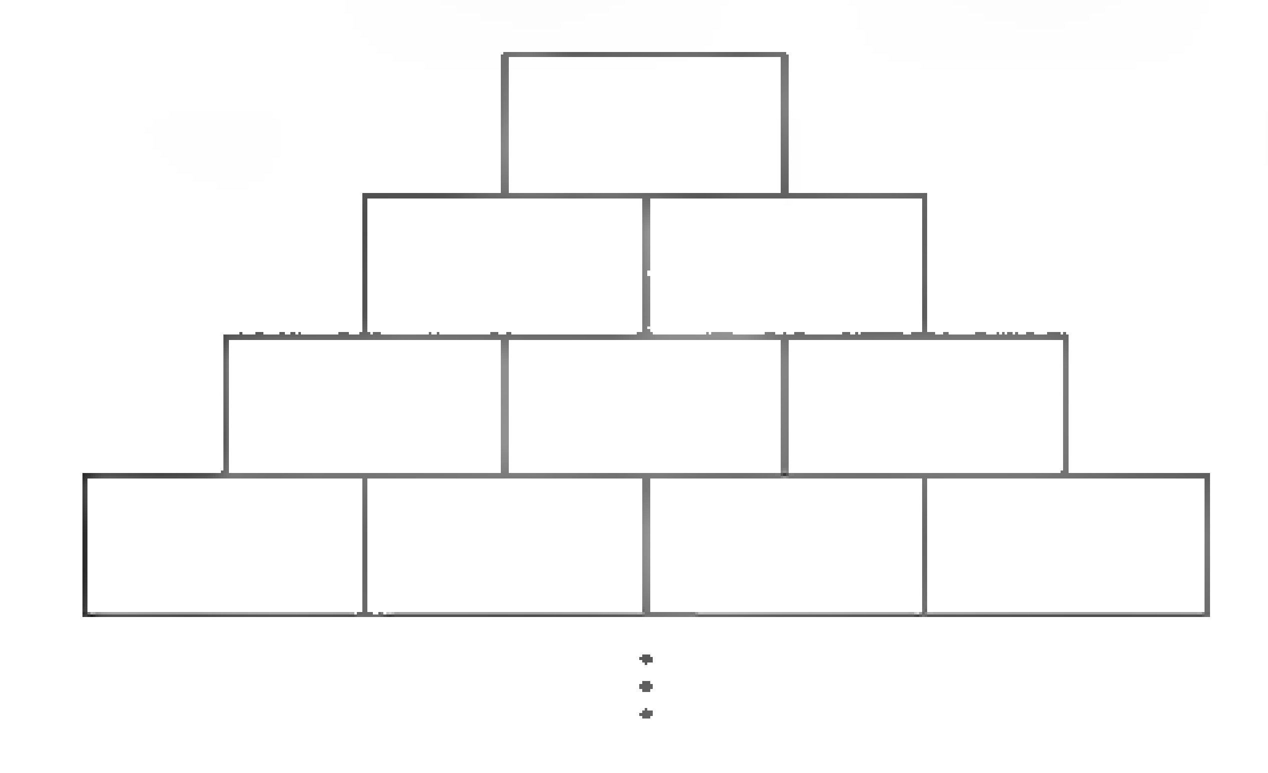
$$n = 141$$

وبهذا نجد أن

$$S_{141} = \frac{141}{2}(50 + (-20)) = \frac{141}{2} \times 30 = 141 \times 15$$

إذن، $S_{141} = 2115$ ◇

مثال (١٣) أراد سلطان أن يبني جدار داخلياً على شكل مثلث كما هو مبين في الشكل وذلك باستخدام طوب حراري. إذا كان عدد الطوب الذي استخدمه سلطان لبناء الجدار هو 171 فما هو عدد طبقات الجدار ؟



الحل

لاحظ أن عدد الطوب في الطبقات هو $1, 2, 3, 4, \ldots$.

وهذه متتابعة حسابية حدها الأول 1 وفرقها المشترك 1. الآن

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$
$$171 = \frac{n}{2}\left[2\times 1 + (n-1)\times 1\right]$$
$$342 = n(1+n)$$
$$342 = n + n^2$$
$$n^2 + n - 342 = 0$$
$$(n+19)(n-18) = 0$$

إذن، $n = -19$ وهذا مرفوض. وبهذا يكون عدد طبقات الجدار هو $n = 18$. ◇

مثال (١٤) أثبت أن مجموع أول n من الأعداد الصحيحة الموجبة يساوي $\frac{1}{2}n(n+1)$.

الحل

الأعداد هي $1, 2, 3, \ldots, n$ وهي متتابعة حسابية حدها الأول $a_1 = 1$ وحدها النوني $a_n = n$ وفرقها المشترك هو $d = 1$. إذن،

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2}(n+1).$$ ◇

مثال (١٥) متتابعة حسابية حدها السادس يساوي 21 ومجموع أول 17 حد منها يساوي 0. جد حدها الثالث.

الحل

$$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 21 = a_1 + 5d$$
$$S_{17} = \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) \Rightarrow 0 = \frac{17}{2}(2a_1 + 16d)$$

إذن،

$$a_1 + 5d = 21$$
$$2a_1 + 16d = 0$$

أي أن

$$a_1 + 5d = 21$$
$$a_1 + 8d = 0$$

بطرح المعادلتين نجد أن

$$-3d = 21$$
$$d = -7$$

بالتعويض في المعادلة $a_1 + 8d = 0$ نرى أن

$a_1 = -8d = -8 \times (-7) = 56$.

إذن، $a_3 = a_1 + 2d = 56 + 2 \times (-7) = 42$. ◇

(٥.٦) المتسلسلات الهندسية (Geometric Series)

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود متتالية لمتتابعة هندسية. على سبيل المثال،

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 128$$

متسلسلة هندسية لأنها مجموع حدود المتتابعة الهندسية

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 128$$

لنفرض أن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ متتابعة هندسية نسبتها المشتركة هي r. عندئذ، يمكن كتابة حدودها على الصورة

$$a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$$

من ذلك يكون

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1}$$

وبضرب طرفي المعادلة بالعدد r نرى أن

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

وبطرح المعادلتين نجد أن

$$\begin{aligned} rS_n - S_n &= a_1 r^n - a_1 \\ S_n(r-1) &= a_1\left(r^n - 1\right) \\ S_n &= \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \end{aligned}$$

لاحظ أن $r \neq 1$.

مثال (١٦) جد مجموع الحدود العشرين الأولى للمتابعة

$$9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$$

الحل

المتتابعة هندسية حدها الأول $a_1 = 9$ والنسبة المشتركة $r = -\frac{1}{3}$. إذن،

$$S_{20} = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{9\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{20} - 1\right)}{-\frac{1}{3} - 1} = -\frac{27}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{20} - 1\right).$$ ◇

مثال (١٧) مجموع الحدين الأول والثاني لمتسلسلة هندسية يساوي 90 وحدها الثالث يساوي 24. أثبت وجود متسلسلتين تحققان ذلك. ثم جد الحد الأول والنسبة المشتركة لكل منهما.

الحل

لدينا

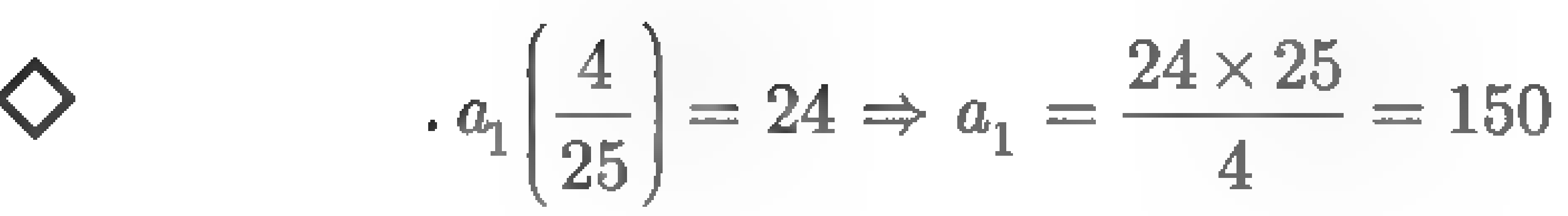
$$a_1 + a_1 r = a_1(1+r) = 90$$
$$a_1 r^2 = 24$$

بقسمة المعادلتين نجد أن

$$\frac{1+r}{r^2} = \frac{90}{24} = \frac{15}{4}$$
$$15r^2 - 4r - 4 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\times(-4)\times 15}}{2\times 15} = \frac{4\pm\sqrt{256}}{30} = \frac{4\pm 16}{30}$$



إذن، $r_1 = \frac{4+16}{30} = \frac{2}{3}$ و $r_2 = \frac{4-16}{30} = -\frac{2}{5}$.

عند $r_1 = \frac{2}{3}$ نجد أن

$$a_1\left(\frac{4}{9}\right) = 24 \Rightarrow a_1 = \frac{9\times 24}{4} = 54.$$

وعند $r_2 = -\frac{2}{5}$ نجد أن

$$a_1\left(\frac{4}{25}\right) = 24 \Rightarrow a_1 = \frac{24\times 25}{4} = 150.$$

◇

(٥.٧) مسائل محلولة

(١) ما عدد الأعداد الفردية بين العددين $\frac{17}{4}$ و $\frac{175}{2}$ ؟

(أ) 38 (ب) 40 (ج) 42 (د) 44

(٢) [MAΘ 2011] حاصل ضرب ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية يساوي 27. ما هي قيمة الحد الأوسط من هذه الحدود الثلاثة ؟

(أ) $\frac{27}{8}$ (ب) 3 (ج) 9 (د) 27

(٣) [MAΘ 2011] ما مجموعة الثلاثة أعداد من بين مجموعات الأعداد التالية التي يمكن أن تكون أول ثلاثة أعداد لمتتابعة حسابية ؟

(أ) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1$ (ب) $2, 4, 8$ (د) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{27}{25}$ (د) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

(٤) إذا رتبنا الجذور الثلاثة لكثيرة الحدود

$$f(x) = (x-11)\left(x^2 - 10x + 21\right)$$

تصاعدياً فإنها تكون متتابعة حسابية.ما فرقها المشترك ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 7 (د) 11

(٥) [MAΘ 2011] ما عدد حدود المتتابعة $-8, -5, -2, \ldots, 2011$ ؟

(أ) 671 (ب) 672 (ج) 673 (د) 674

(٦) [MAΘ 2011] متتابعة هندسية حدها الأول 6 ونسبتها المشتركة 12. ما الحد العاشر ؟

(أ) $2^{19} \times 3^{10}$ (ب) $2^{10} \times 3^{10}$ (ج) $2^{21} \times 3^{11}$ (د) $2^{22} \times 3^{11}$

(٧) ما عدد حدود المتتابعة $36, 35\frac{1}{3}, 34\frac{2}{3}, \ldots, -30$ ؟



(أ) 60 (ب) 99 (ج) 100 (د) 200

(٨) [MAΘ 2011]الحد الثاني من متتابعة هندسية يساوي 144 والحد الرابع يساوي 324 . ما مجموع جميع القيم الممكنة للحد الأول ؟

(أ) 0 (ب) -96 (ج) 216 (د) -216

(٩) إذا أدخلنا ثلاثة أعداد بين 5 و 10 لتكوين متتابعة حسابية فإن مجموع الأعداد الثلاثة هو

(أ) $22\frac{1}{2}$ (ب) $23\frac{1}{2}$ (ج) $24\frac{1}{4}$ (د) $24\frac{3}{4}$

(١٠) [MAΘ 2011] ما العدد الصحيح الموجب الذي يحقق

$$15 + 16 + 17 + \cdots + n = 15n \text{ ؟}$$

(أ) -6 (ب) 21 (ج) 35 (د) 85

(١١) ما مجموع قيم k المختلفة التي تجعل $5, k, k^2 - 8$ متتابعة حسابية ؟

(أ) -1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(١٢) إذا كان $a_n = \dfrac{71 - 7n}{2}$ هو الحد العام لمتتابعة. ما أصغر قيمة للعدد n التي تجعل حدود المتتابعة أصغر من -200 ؟

(أ) 67 (ب) 68 (ج) 69 (د) 70

(١٣) [MAΘ 2011] كتب سلطان على السبورة متتابعة حسابية مكونة من ثلاثة حدود ولاحظ أن مجموع هذه الحدود يساوي 21 وأن حاصل ضرب الحدين الكبيرين يساوي ضعف حاصل ضرب الحدين الصغيرين. ما قيمة الحد الأكبر من بين هذه الحدود ؟

(أ) 8 (ب) $\frac{33}{4}$ (ج) $7 + \sqrt{2}$ (د) $\frac{28}{3}$

(١٤) [AHSME 1956] مجموع الأعداد التي على الصورة $2k+1$ حيث k عدد صحيح يأخذ القيم من 1 إلى n هو

(أ) n^2 (ب) $n(n+1)$ (ج) $n(n+2)$ (د) $(n+1)^2$

(١٥) [AHSME 1950] أدخلنا خمسة أوساط هندسية بين العددين 8 و 5832. ما الحد الخامس من المتتابعة الهندسية التي نحصل عليها ؟

(أ) 648 (ب) 832 (ج) 1168 (د) 1950

(١٦) [MAΘ 2010] إذا كانت $a<b<c<d$ هي الحدود الأربعة الأولى من متتابعة حسابية وكان $d-a=r$ فما قيمة $c-a$ ؟

(أ) $\frac{r}{3}$ (ب) $\frac{r}{2}$ (ج) $\frac{2r}{3}$ (د) $\frac{3r}{4}$

(١٧) ما مجموع الوسطين الحسابيين بين العددين -21 و 24 ؟

(أ) -2 (ب) 2 (ج) 3 (د) 12

(١٨) أي من المتتابعات الهندسية التالية لا تحتوي الحد الذي قيمته 64 ؟

(أ) $2, 4, 8, \ldots$ (ب) $1, -2, 4, \ldots$

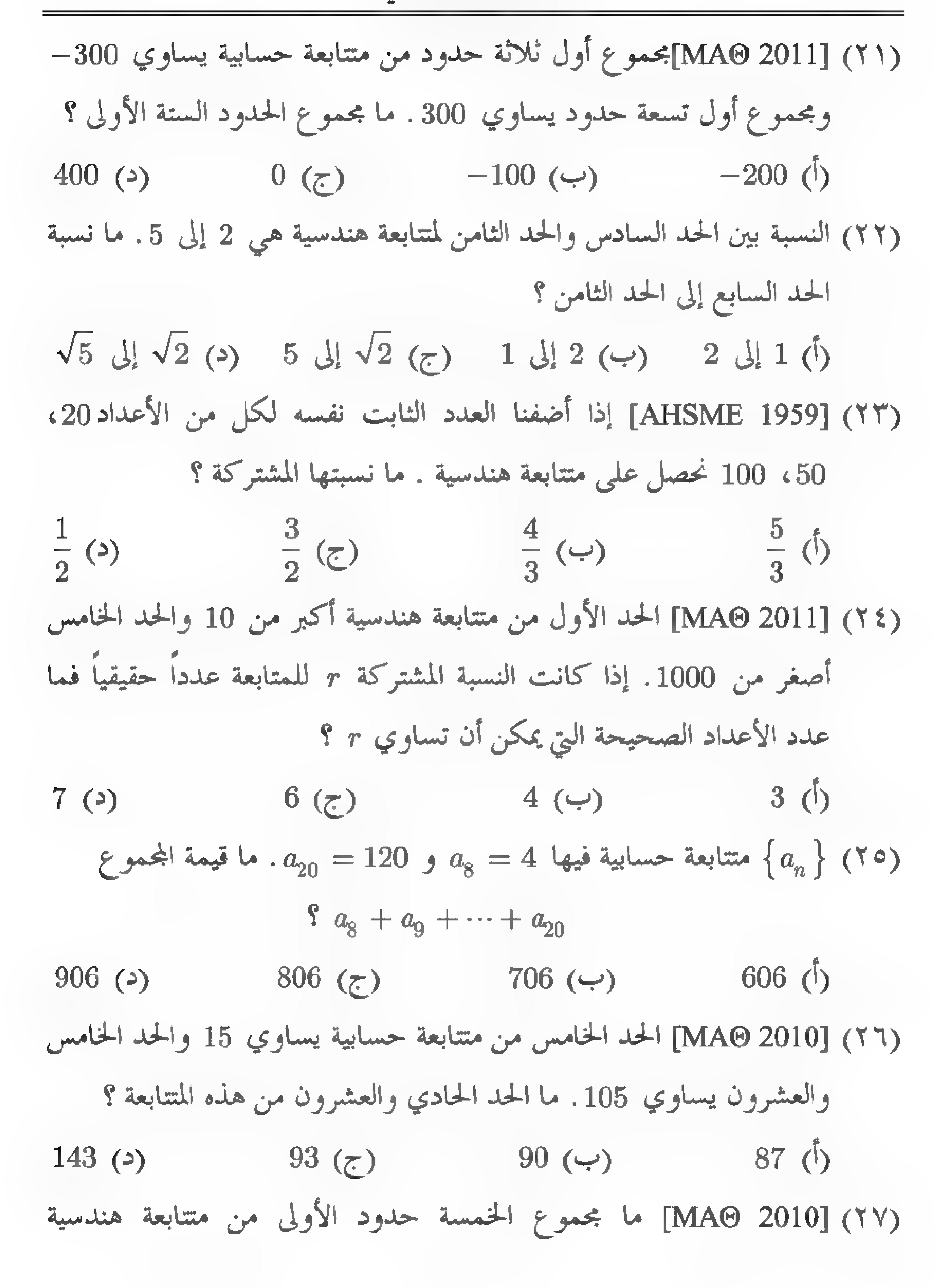
(ج) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ (د) $\frac{1}{4}, 2, 16, \ldots$

(١٩) [MAΘ 2010] مجموع الحدود الثمانية الأولى من متتابعة حسابية يساوي 440 والفرق المشترك هو 6. ما الحد الثالث من المتتابعة ؟

(أ) 32 (ب) 34 (ج) 44 (د) 46

(٢٠) عدد حدود المتتابعة $-16, -10, -4, \ldots$ يساوي 37. ما مجموع هذه المتتابعة ؟

(أ) 2404 (ب) 3404 (ج) 4000 (د) 4404



(٢١) [MAΘ 2011]مجموع أول ثلاثة حدود من متتابعة حسابية يساوي -300 ومجموع أول تسعة حدود يساوي 300 . ما مجموع الحدود الستة الأولى ؟

(أ) -200 (ب) -100 (ج) 0 (د) 400

(٢٢) النسبة بين الحد السادس والحد الثامن لمتتابعة هندسية هي 2 إلى 5. ما نسبة الحد السابع إلى الحد الثامن ؟

(أ) 1 إلى 2 (ب) 2 إلى 1 (ج) $\sqrt{2}$ إلى 5 (د) $\sqrt{2}$ إلى $\sqrt{5}$

(٢٣) [AHSME 1959] إذا أضفنا العدد الثابت نفسه لكل من الأعداد 20، 50، 100 نحصل على متتابعة هندسية . ما نسبتها المشتركة ؟

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{1}{2}$

(٢٤) [MAΘ 2011] الحد الأول من متتابعة هندسية أكبر من 10 والحد الخامس أصغر من 1000. إذا كانت النسبة المشتركة r للمتابعة عدداً حقيقياً فما عدد الأعداد الصحيحة التي يمكن أن تساوي r ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 6 (د) 7

(٢٥) $\{a_n\}$ متتابعة حسابية فيها $a_8 = 4$ و $a_{20} = 120$. ما قيمة المجموع $a_8 + a_9 + \cdots + a_{20}$ ؟

(أ) 606 (ب) 706 (ج) 806 (د) 906

(٢٦) [MAΘ 2010] الحد الخامس من متتابعة حسابية يساوي 15 والحد الخامس والعشرون يساوي 105. ما الحد الحادي والعشرون من هذه المتتابعة ؟

(أ) 87 (ب) 90 (ج) 93 (د) 143

(٢٧) [MAΘ 2010] ما مجموع الخمسة حدود الأولى من متتابعة هندسية

حدودها أعداد حقيقية حدها الأول يساوي 17 وحدها الخامس يساوي 272 ؟

(أ) 17 أو 17×3^4 (ب) 177 (ج) -17 (د) 187 أو 527

(٢٨) مجموع أول n حد من حدود المتتابعة $20, 16, 12, \ldots$.

يساوي 60. ما مجموع القيم الممكنة للعدد n ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 9 (د) 11

(٢٩) ما المتتابعة من بين المتتابعات التالية التي ليست حسابية ولا هندسية ؟

(أ) $10, 36, 62, 88, \ldots$ (ب) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$

(ج) $-15, -2, 11, 24, \ldots$ (د) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(٣٠) [AHSME 1953] متتابعة هندسية حدودها موجبة. كل حد من حدودها يساوي مجموع الحدين التاليين له. ما نسبتها المشتركة ؟

(أ) 1 (ب) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (ج) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (د) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(٣١) لتكن $\{a_n\}$ متتابعة حسابية مجموع أول n حد من حدودها يساوي $S_n = 2n^2 + 6n$. إذا كانت a_3, a_t, a_{15} متتابعة هندسية فما قيمة t ؟

(أ) 5 (ب) 7 (ج) 8 (د) 9

(٣٢) [MAΘ 2010] عدد مقاعد الصف الأخير من مسرح يساوي 64. وعدد مقاعد كل صف بعد ذلك يقل عن الذي خلفه بثلاثة مقاعد. إذا كان عدد صفوف المسرح يساوي 18 فكم يكون عدد مقاعد الصف الأول ؟

(أ) 10 (ب) 13 (ج) 16 (د) 19

(٣٣) [MAΘ 2009] الحد الثالث من متتابعة هندسية هو 10 والحد السابع

هو 160. ما هي القيمة الممكنة للحد الثاني من بين القيم التالية ؟

(أ) -5 (ب) $-\frac{5}{2}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) 8

(٣٤) [MAC12 2002]مجموع 18 من الأعداد الصحيحة الموجبة المتتالية هو مربع كامل. ما أصغر قيمة لهذا المجموع ؟

(أ) 169 (ب) 225 (ج) 289 (د) 361

(٣٥) [MAΘ 2007]إذا كانت $\frac{1}{4}, x, y, \frac{2}{27}$ متتابعة هندسية من الأعداد الحقيقيه فما قيمة $x+y$ ؟

(أ) $\frac{11}{36}$ (ب) $\frac{5}{18}$ (ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{15}{16}$

(٣٦) لتكن $2, x, 6$ متتابعة حسابية فرقها المشترك يساوي d وأن $2, y, 6$ متتابعة هندسية نسبتها المشتركة r. ما قيمة $\frac{\sqrt{3}r}{d}$ ؟

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{5}{2}$ (ج) 3 (د) 5

(٣٧) [MAΘ 2007] متتابعة هندسية حدودها موجبة حدها الثالث هو 2 وحدها السابع هو 8. إذا كان $S_6 = a\sqrt{b} + c$ فما قيمة $a+b+c$ ؟

(أ) 12 (ب) 16 (ج) 24 (د) 63

(٣٨) [MAΘ 2009] متتابعة حسابية فرقها المشترك هو d وحدها الأول $a_1 = -5$ والمجموع $S_8 = 16$. ما قيمة المجموع

$$\frac{1}{18}\left(d + d^2 + d^3 + d^4 + d^5 + d^6\right) \text{ ؟}$$

(أ) $-\frac{31}{9}$ (ب) 6 (ج) $\frac{31}{9}$ (د) 7

(٣٩) [AHSME 1955] لتكن $\{a_n\}$ متتابعة هندسية حيث $a_1 \neq 0$ و $r \neq 0$ ولتكن $\{b_n\}$ متتابعة حسابية حيث $b_1 = 0$. كونا المتتابعة $\{c_n\}$ على النحو التالي: $c_n = a_n + b_n$ لكل $n \geq 1$.
إذا كانت حدود c_n هي $1, 1, 2, \ldots$ فما مجموع الحدود العشرة الأولى للمتتابعة c_n ؟

(أ) 467 (ب) 557 (ج) 978 (د) 1068

(٤٠) [AHSME 1958] الحد الأول من متتابعة حسابية حدودها أعداد صحيحة متتالية هو $k^2 + 1$. ما قيمة المجموع S_{2k+1} ؟

(أ) $k^3 + (k+1)^3$ (ب) $(k-1)^3 + k^3$

(ج) $(k+1)^3$ (د) $(2k+1)(k+1)^2$

(٤١) [AHSME 1960] لنفرض أن S_n، S_{2n}، S_{3n} هي مجاميع n، $2n$، $3n$ من حدود متتابعة حسابية حدها الأول هو a وفرقها المشترك هو d. ما قيمة $S_{3n} - S_{2n} - S_n$ ؟

(أ) $2n^2d$ (ب) n^2d (ج) an^2d (د) and

(٥.٨) حلول المسائل المحلولة

(١) الإجابة هي (ج): الأعداد هي $5, 7, 9, 11,\ldots, 87$.

وهذه متتابعة حسابية حدها الأول $a_1 = 5$، فرقها المشترك $d = 2$، الحد الأخير $a_n = 87$. إذن،

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$87 = 5 + 2(n-1)$$
$$2n = 84$$
$$.n = 42$$

(٢) الإجابة هي (ب): الحدود الثلاثة هي $\frac{a}{r}, a, ar$ حيث r هو النسبة المشتركة. عندئذ،

$$a^3 = \frac{a}{r} \times a \times ar = 27$$
$$.a = \sqrt[3]{27} = 3$$

(٣) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$
$$4 - 2 \neq 8 - 4$$
$$\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \neq \frac{27}{25} - \frac{3}{5}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

إذن، (أ) هي متتابعة حسابية فرقها المشترك هو $\frac{2}{5}$.

(٤) الإجابة هي (ب): $f(x) = (x-11)(x-7)(x-3)$.

إذن، الجذور هي 3، 7، 11. وهي متتالية حسابية فرقها المشترك

يساوي 4.

(٥) الإجابة هي (د): المتتابعة حسابية فيها $a_1 = -8$، $d = 3$، $a_n = 2011$.

إذن،

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$2011 = -8 + (n-1)\times 3$$
$$2022 = 3n$$
$$.n = \frac{2022}{3} = 674$$

(٦) الإجابة هي (أ):

$$.a_{10} = a_1 r^9 = 6\times(12)^9 = 2\times 3\times 2^{18}\times 3^9 = 2^{19}\times 3^{10}$$

(٧) الإجابة هي (ج): المتتابعة حسابية فيها $a_1 = 36$، $d = -\frac{2}{3}$،

$a_n = -30$. إذن،

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$-30 = 36 + (n-1)\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$-66 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}n$$
$$-\frac{200}{3} = -\frac{2}{3}n$$
$$.n = 100$$

(٨) الإجابة هي (أ): لدينا $ar = 144$ و $ar^3 = 324$. بقسمة المعادلتين نجد أن

$$\frac{ar^3}{ar} = \frac{324}{144}$$
$$r^2 = 2.25$$

$$r = \pm\sqrt{2.25}$$

إذن، $a = \dfrac{144}{\sqrt{2.25}}$ أو $a = \dfrac{-144}{\sqrt{2.25}}$ ومجموعهما يساوي 0.

(٩) الإجابة هي (أ): الأعداد هي $5, 5+d, 5+2d, 5+3d, 10$.

من ذلك، نجد أن

$$5 + d - 5 = 10 - 5 - 3d$$
$$4d = 5$$
$$d = \frac{5}{4}$$

والأعداد هي $6\frac{1}{4}$، $7\frac{1}{2}$، $8\frac{3}{4}$. مجموعها يساوي

$$6\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 8\frac{3}{4} = 22\frac{1}{2}.$$

(١٠) الإجابة هي (ج): هذه متتابعة حسابية فيها $a_1 = 15$، $d = 1$، $a_n = n + 14$ وعدد حدودها $n - 14$. إذن

$$S_{n-14} = \frac{(n-14)}{2}[15+n] = 15n$$
$$15n + n^2 - 210 - 14n = 30n$$
$$n^2 - 29n - 210 = 0$$
$$(n-35)(n+6) = 0$$

إذن $n = 35$ (لأن n موجب).

(١١) الإجابة هي (ب): لدينا

$$k^2 - 8 - k = k - 5$$
$$k^2 - 2k - 3 = 0$$
$$(k-3)(k+1) = 0$$

إذن، $k_1 = -1$ و $k_2 = 3$. ويكون $k_1 + k_2 = -1 + 3 = 2$.

(١٢) الإجابة هي (ب): المطلوب هو حل المتباينة

$$\frac{71-7n}{2} < -200$$
$$7n > 471$$
$$n > \frac{471}{7} \approx 67.3$$

إذن، أصغر قيمة صحيحة للعدد n هي 68.

(١٣) الإجابة هي (د): لنفرض أن هذه الأعداد هي $a-d, a, a+d$. عندئذ،

$$a-d+a+a+d = 21$$
$$3a = 21$$
$$a = 7$$

الآن،

$$7(7+d) = 2\times(7-d)\times 7$$
$$7+d = 14-2d$$
$$d = \frac{7}{3}$$

العدد الأكبر هو $7+\frac{7}{3} = \frac{28}{3}$.

(١٤) الإجابة هي (ج): المتتابعة حسابية حدها الأول 3 والفرق المشترك 2.

إذن،

$$S_n = \frac{n}{2}[2\times 3+(n-1)\times 2] = \frac{n}{2}(4+2n)$$
$$= 2n+n^2 = n(n+2)$$

(١٥) الإجابة هي (أ): لدينا $a_1 = 8$ و $a_7 = 5832$. إذن،

$$\frac{a_1r^6}{a_1} = \frac{5832}{8}$$
$$r^6 = 729$$
$$r = \pm 3$$

الآن، $a_5 = a_1r^4 = 8 \times (\pm 3)^4 = 648$.

(١٦) الإجابة هي (ج): لدينا

$$d - a = 3(b - a)$$
$$b - a = \frac{d - a}{3} = \frac{r}{3}$$

أيضاً، $c - a = 2(b - a) = \frac{2r}{3}$.

(١٧) الإجابة هي (ج): لنفرض أن d هو الفرق المشترك. عندئذ، الحدود الأربعة هي $-21, -21 + d, -21 + 2d, 24$.

ومجموع الوسطين هو $-6 + 9 = 3$.

(١٨) الإجابة هي (د): بكتابة بعض الحدود الأخرى للمتتابعات نجد أن

(أ) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

(ب) $1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \ldots$

(ج) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

(د) $\frac{1}{4}, 2, 16, 128, \ldots$

ولذا فالمتتابعة (د) لا تحتوي 64.

(١٩) الإجابة هي (د):

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{8}{2}(2a_1 + 7\times 6) \\ 440 &= 4(2a_1 + 42) \\ 2a_1 &= 68 \\ a_1 &= 34 \end{aligned}$$

إذن، $a_3 = 34 + 2\times 6 = 46$.

(٢٠) الإجابة هي (ب): هذه متتابعة حسابية حدها الأول -16 وفرقها المشترك 6 . إذن،

$$S_{37} = \frac{37}{2}\left[2\times(-16) + 36\times 6\right] = 37\times 92 = 3404 .$$

(٢١) الإجابة هي (أ): لدينا

$$a + (a+d) + (a+2d) = -300$$

$$3a + 3d = -300 \qquad (١)$$

أيضاً،

$$a + (a+d) + \cdots + (a+8d) = 300$$

$$9a + 36d = 300$$

$$3a + 12d = 100 \qquad (٢)$$

المطلوب إيجاد $a + (a+d) + \cdots + (a+5d)$. أي إيجاد $6a + 15d$.

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نجد أن $9d = 400$. إذن،

$$\begin{aligned} 6a + 15d &= 6a + 6d + 9d \\ &= 2(3a + 3d) + 9d \\ &= 2\times(-300) + 400 = -200 \end{aligned}$$

(٢٢) الإجابة هي (د): لدينا

$$\frac{ar^5}{ar^7} = \frac{2}{5} \Rightarrow r^2 = \frac{5}{2} .$$

إذن، $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{r} = \frac{ar^6}{ar^7}$.

(٢٣) الإجابة هي (أ): لدينا المتتابعة الهندسية $20 + k, 50 + k, 100 + k$.

عندئذ،

$$\begin{aligned} \frac{50+k}{20+k} &= \frac{100+k}{50+k} \\ (50+k)^2 &= (20+k)(100+k) \\ 2500 + 100k + k^2 &= 2000 + 120k + k^2 \\ 20k &= 500 \\ k &= \frac{500}{20} = 25 \end{aligned}$$

إذن، النسبة المشتركة هي $\frac{5}{3} = \frac{75}{45} = \frac{50+k}{20+k}$.

(٢٤) الإجابة هي (د): لدينا

$$a_1 > 10 \Rightarrow a_1 r^4 > 10r^4$$
$$a_5 = a_1 r^4 < 1000 \Rightarrow 10r^4 < 1000 \Rightarrow r^4 < 100$$

الأعداد الصحيحة التي تحقق ذلك هي $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. بوضع $a_1 = 11$ نجد أن المتباينتين محققتان لجميع قيم r هذه. إذن، العدد المطلوب هو 7.

(٢٥) الإجابة هي (ج): لاحظ أن المجموع هو مجموع متتابعة حسابية حدها الأول 4 وحدها الثالث عشر هو 120. إذن،

$$a_8 + a_9 + \cdots + a_{20} = \frac{13}{2}[4 + 120] = 806$$

(٢٦) الإجابة هي (أ): لدينا

$$a_5 = a_1 + 4d = 15$$
$$a_{25} = a_1 + 24d = 105$$

بطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية نرى أن

$$20d = 90$$
$$d = \frac{9}{2}$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن

$$a_1 = 15 - 4 \times \frac{9}{2} = 15 - 18 = -3$$

إذن، $a_{21} = a_1 + 20d = -3 + 20 \times \frac{9}{2} = 87$.

(٢٧) الإجابة هي (د): لدينا

$a_1 = 17$ و $272 = a_5 = a_1 r^4 = 17r^4$. إذن،

$$r^4 = \frac{272}{17} = 16$$
$$r = \pm 2$$

إذا كان $r = 2$ فنرى أن

$$S_5 = \frac{a_1\left(r^5 - 1\right)}{r - 1} = 17\left(2^5 - 1\right) = 17 \times 31 = 527$$

وإذا كان $r = -2$ فنجد أن

$$S_5 = \frac{a_1\left(r^5 - 1\right)}{r - 1} = \frac{17\left((-2)^5 - 1\right)}{-2 - 1} = \frac{17 \times (-33)}{-3} = 187.$$

(٢٨) الإجابة هي (د): المتتابعة حسابية فيها $a_1 = 20$ و $d = -4$ و $S_n = 60$

إذن،.

$$\frac{n}{2}\left[2\times 20+(n-1)\times(-4)\right]=60$$
$$n(44-4n)=120$$
$$n^2-11n+30=0$$
$$(n-5)(n-6)=0$$

إذن، $n_1 = 6$ و $n_2 = 5$ ويكون المجموع

$.n_1 + n_2 = 6 + 5 = 11$

(٢٩) الإجابة هي (د):

(أ) متتابعة حسابية فرقها المشترك هو 16.

(ب) متتابعة هندسية نسبتها المشتركة 3.

(ج) متتابعة حسابية فرقها المشترك 13.

(د) لا حسابية ولا هندسية لأن $-\frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$. ولكن $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1$.

أيضاً، $\frac{1}{2} = 1 \div \frac{1}{2}$ ولكن $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$.

(٣٠) الإجابة هي (ب): لدينا لكل $n \geq 1$

$$a_1 r^n = a_1 r^{n+1} + a_1 r^{n+2}$$

بقسمة المعادلة على $a_1 r^n$ نجد أن

$$r^2 + r - 1 = 0$$
$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

وبما أن الحدود موجبة فإن r موجب ومن ثم يكون $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(٣١) الإجابة هي (ب): لدينا

$$a_1 = S_1 = 2\times 1^2 + 6\times 1 = 8$$
$$a_2 = S_2 - a_1 = 2\times 2^2 + 6\times 2 - 8 = 12$$

إذن، $d = a_2 - a_1 = 12 - 8 = 4$.

من ذلك نجد أن $a_3 = a_1 + 2d = 8 + 2\times 4 = 16$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 8 + 14\times 4 = 64$$

الآن، بما أن a_3, a_t, a_{15} متتابعة هندسية فإن

$$a_t^2 = a_3 \times a_{15} = 16\times 64$$

إذن، $a_t = 4\times 8 = 32$. وبهذا نجد أن

$$32 = a_t = 8 + (t-1)\times 4$$
$$4t = 28$$
$$t = \frac{28}{4} = 7$$

(٣٢) الإجابة هي (ب): عدد مقاعد الصفوف هي متتابعة حسابية حدها الأول 64 وفرقها المشترك هو -3 وهي $64, 61, 58, \ldots$.

المطلوب هو إيجاد a_{18}. الآن،

$$a_{18} = a_1 + 17d = 64 + 17\times(-3) = 13\,.$$

(٣٣) الإجابة هي (أ): لدينا $a_1 r^2 = 10$ و $a_1 r^6 = 160$. إذن

$$\frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = \frac{160}{10}$$
$$r^4 = 16$$
$$r = \pm 2$$

إذا كان $r = 2$ فإن $a_1 = \frac{5}{2}$ ويكون $a_2 = a_1 r = \frac{5}{2}\times 2 = 5$.

وإذا كان $r=-2$ فإن $a_1=\frac{5}{2}$ ويكون $a_2=a_1r=\frac{5}{2}\times(-2)=-5$.

إذن، الإجابة الممكنة من بين الاجابات هي -5.

(٣٤) الإجابة هي (ب): لنفرض أن العدد الأول هو a. إذن، الأعداد هي

$$a, a+1, a+2, \ldots, a+17$$

وهي متتابعة حسابية حدها الأول a والفرق المشترك هو 1. من ذلك نجد أن

$$S_{18}=18a+(1+2+3+\cdots+17)=18a+\frac{17\times18}{2}$$
$$=18a+9\times17=9(2a+17)$$

وبما أن 9 مربع كامل فلكي يكون S_{18} مربعاً كاملاً فيجب أن يكون $2a+17$ مربعاً كاملاً. وبتجريب الأعداد 1، 2، 3، 4، ... نجد أن أصغر قيمة للعدد a التي تجعل $2a+17$ مربعاً كاملاً هي $a=4$ ويكون $S_{18}=9(2\times4+17)=225$.

(٣٥) الإجابة هي (ب): لدينا $a_1=\frac{1}{4}$ و $a_1r^3=\frac{2}{27}$. عندئذ، $r^3=\frac{a_1r^3}{a_1}=\frac{2/27}{1/4}=\frac{8}{27}$. إذن، $r=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$.

وبهذا يكون

$$x=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$
$$y=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$$
$$x+y=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}.$$

(٣٦) الإجابة هي (أ): بما أن $2, x, 6$ متتابعة حسابية فإن

$$x-2=6-x \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$

وبهذا فالمتتابعة هي $2, 4, 6$ ويكون فرقها المشترك $d = 2$.

وبما أن $2, y, 6$ ومتتابعة هندسية فإن $y^2 = 2\times 6 = 12 \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$.

إذن، المتتابعة هي $2, 2\sqrt{3}, 6$ وتكون نسبتها المشتركة هي $r = \sqrt{3}$.

وبهذا نجد أن $\dfrac{\sqrt{3}r}{d} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$.

(٣٧) الإجابة هي (ب): لدينا $a_1r^2 = 2$ و $a_1r^6 = 8$. عندئذ،

$$\frac{a_1r^6}{a_1r^2} = \frac{8}{2}$$

$$r^4 = 4 = \left(\sqrt{2}\right)^4$$

من ذلك نرى أن $r = \sqrt{2}$ (حدود المتتابعة موجبة) و $a_1 = 1$. إذن،

$$S_6 = \frac{1\left(\left(\sqrt{2}\right)^6 - 1\right)}{\sqrt{2}-1} = \frac{7}{\sqrt{2}-1} = 7\left(1+\sqrt{2}\right) = 7\sqrt{2}+7$$

وبهذا فإن $a = 7$ ، $b = 2$ ، $c = 7$ ويكون

$a+b+c = 7+2+7 = 16$.

(٣٨) الإجابة هي (د): لدينا

$$16 = S_8 = \frac{8}{2}\left[2\times(-5)+7d\right]$$

$$4 = -10+7d$$

$$7d = 14$$

$$d = 2$$

الآن، $d, d^2, d^3, d^4, d^5, d^6$ متتابعة هندسية حدها الأول $d = 2$ ونسبتها المشتركة هي $d = 2$. إذن،

$$\frac{1}{18}S_6 = \frac{1}{18} \times \frac{2\left(2^6 - 1\right)}{2-1} = \frac{2 \times 63}{18} = 7.$$

(٣٩) الإجابة هي (ج): المتتابعة الهندسية هي $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots$.

والمتتابعة الحسابية هي

$$0, d, 2d, \ldots .$$

بما أن $c_n = a_n + b_n$ فإن $a_1 + 0 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$ وإن

$$a_1r + d = 1 \Rightarrow r + d = 1 \quad (١)$$

$$a_1r^2 + 2d = 2 \Rightarrow r^2 + 2d = 2 \quad (٢)$$

بضرب المعادلة (١) بالعدد -2 وجمع الناتج إلى المعادلة (٢) نجد أن $r^2 - 2r = 0$. أي أن $r(r-2) = 0$.

إذن، $r = 2$ (لأن $r \neq 0$).وبهذا يكون $d = -1$.

مجموع العشرة حدود الأولى للمتابعة الهندسية $\{a_n\}$ هو

$$\frac{a_1\left(r^{10} - 1\right)}{r-1} = \frac{2^{10} - 1}{2-1} = 1023$$

مجموع الحدود العشرة الأولى للمتتابعة الحسابية $\{b_n\}$ هو

$$\frac{10}{2}\left[0 + 9 \times (-1)\right] = -45$$

إذن، مجموع الحدود العشرة الأولى للمتتابعة $\{c_n\}$ هو

$$1023 + (-45) = 978.$$

(٤٠) الإجابة هي (أ): لاحظ أن $a_1 = k^2 + 1$ وأن $d = 1$. إذن،

$$S_{2k+1} = \frac{2k+1}{2}\left[2\left(k^2+1\right)+(2k)\times 1\right]$$
$$= \frac{2k+1}{2}\left(2k^2+2k+2\right)$$
$$= (2k+1)\left(k^2+k+1\right)$$
$$= 2k^3+3k^2+3k+1$$
$$= k^3+3k^2+3k+1+k^3 = (k+1)^3+k^3$$

(٤١) الإجابة هي (أ):

$$S_{3n}-S_{2n}-S_n$$
$$= \frac{3n}{2}\left(2a+(3n-1)d\right)-\frac{2n}{2}\left(2a+(2n-1)d\right)$$
$$-\frac{n}{2}\left(2a+(n-1)d\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left[6a+9nd-3d-4a-4nd+2d-2a-nd+d\right]$$
$$= \frac{n}{2}\left[4nd\right] = 2n^2d$$

(٥.٩) مسائل غير محلولة

(١) المتابعة $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$ هي:

(أ) حسابية فقط (ب) هندسية فقط

(ج) لا حسابية ولا هندسية (د) حسابية و هندسية

(٢) متتابعة حسابية حدها الأول 20 وحدها الأخير 110 وعدد حدودها 31. ما قيمة فرقها المشترك ؟

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 2 (د) 3

(٣) الحد العام لكل من المتتابعتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هو $a_n = \frac{71-7n}{2}$ و $b_n = 2 \times (-3)^{n-1}$. عندئذ،

(أ) كل من المتتابعتين هندسية

(ب) كل من المتتابعتين حسابية

(ج) $\{a_n\}$ حسابية و $\{b_n\}$ هندسية

(د) $\{a_n\}$ هندسية و $\{b_n\}$ حسابية

(٤) [MAΘ 1991] ما الحد السادس من متتابعة حسابية حدها الواحد والثلاثون يساوي 18 وحدها الثالث والسبعون يساوي 46 ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) 1 (د) $\frac{4}{3}$

(٥) [MAΘ 1992] الحد الثاني من متتابعة هندسية يساوي 4 والحد السادس يساوي 16. إذا كانت النسبة بين حدين متتاليين عدداً حقيقياً فما قيمة الحد الرابع ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٦) ما قيمة k التي تجعل $k+1, 2k+1, 13$ متتابعة حسابية ؟

(أ) -4 (ب) -3 (ج) 3 (د) 4

(٧) إذا أدخلنا أربعة أعداد بين -8 و 32 لتكوين متتابعة حسابية فإن مجموع الأعداد الأربعة هذه هو

(أ) 32 (ب) 40 (ج) 48 (د) 50

(٨) [Mathcounts 1992] مجموع الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة هندسية حدودها أعداد صحيحة موجبة يساوي سبعة أمثال الحد الأول و مجموع الحدود الأربعة الأولى يساوي 45 . ما الحد الأول ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٩) إذا كانت الأعداد $k-1, 2k, 21-k$ متتابعة هندسية فما مجموع القيم الممكنة للمقدار k ؟

(أ) $-\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{22}{5}$ (د) $\frac{20}{3}$

(١٠) ما عدد حدود المتتابعة $8, 4, 2, 1, \ldots, \frac{1}{256}$ ؟

(أ) 8 (ب) 11 (ج) 12 (د) 13

(١١) ما عدد حدود المتتابعة $6, 6\sqrt{2}, 12, \ldots, 3072$ ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 19 (د) 24

(١٢) [MAΘ 2011] المتتابعة التربيعية هي متتابعة حدها العام $a_n = an^2 + bn + c$ حيث a، b، c أعداد ثابتة. إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة تربيعية هي $a_1 = 1$، $a_2 = 3$، $a_3 = 1$ فما الحد

الرابع ؟

(أ) -7 (ب) -5 (ج) 0 (د) 3

(١٣) [MAΘ2010] ما هو مجموع الحدود الثلاثين الأولى من المتسلسلة

$1-2+2-4+3-6+4-8+\cdots$ ؟

(أ) -120 (ب) -105 (ج) -465 (د) -15

(١٤) [MAΘ 2011] لتكن $5,11,13$ هي ثلاثة حدود من الخمسة حدودها الأولى لمتتابعة حسابية تزايدية. ما الحد العشرين من المتتابعة ؟

(أ) 38 (ب) 41 (ج) 43 (د) 45

(١٥) متتابعة هندسية حدها الخامس 162 وحدها الثامن -4374. ما مجموع حدها الأول ونسبتها المشتركة ؟

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 0 (د) 1

(١٦) إذا كانت الأعداد $k, k+8, 9k$ متتابعة هندسية فما قيم أوساطها الهندسية ؟

(أ) -2 و 4 (ب) 6 و 12 (ج) 2 و -4 (د) -6 و 12

(١٧) [MAΘ 2010] الحد الثاني من متتابعة هندسية حقيقية موجبة هو 4 والحد السادس هو 16. ما الحد الرابع ؟

(أ) 10 (ب) 8 (ج) $8\sqrt{2}$ (د) 12

(١٨) مجموع المتسلسلة $-6+1+8+15+\cdots+141$ يساوي

(أ) 1385 (ب) 1450 (ج) 1485 (د) 1515

(١٩) [MAΘ 2010] النسبة بين الحد الأول و الثالث لمتتابعة حسابية هي 5 إلى 4. ما النسبة بين الحد الأول إلى الحد الثاني ؟

(أ) 10 إلى 9 (ب) 5 إلى 2 (ج) 5 إلى 8 (د) 5 إلى 9

(٢٠) حاصل جمع ثلاثة حدود متتالية لمتتابعة حسابية يساوي 12 وحاصل ضربهم يساوي -80. ما أصغر هذه الأعداد ؟

(أ) -2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٢١) [MAΘ 2010] متتابعة حسابية

$$-2, 1+2k, 4+4k, \ldots$$

مجموع الحدود العشرة الأولى هو $a+bk$. ما قيمة $a-b$ ؟

(أ) 15 (ب) 25 (ج) 35 (د) 55

(٢٢) مجموع خمسة حدود متتالية من متتابعة حسابية يساوي 40 وحاصل ضرب الحد الأول والثالث والخامس من هذه الحدود يساوي 224. ما أصغر هذه الحدود ؟

(أ) 2 (ب) 5 (ج) 8 (د) 11

(٢٣) إذا كان مجموع أول n حد من حدود المتتابعة

$$9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$$

يساوي $\frac{182}{27}$ فما قيمة n ؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 12 (د) 15

(٢٤) الأعداد $4, a, b, 8\sqrt{2}, c, d$ متتابعة هندسية حقيقية. ما قيمة $\frac{d}{a}$ ؟

(أ) 2 (ب) $2\sqrt{2}$ (ج) 4 (د) $4\sqrt{2}$

(٢٥) [MAΘ 2010] إذا كانت $\sqrt{x+1}, \sqrt{x+\frac{49}{4}}, 6$ هي الحدود الثلاثة

الأولى لمتتابعة حسابية. ما مجموع قيم x الممكنة ؟

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

(٢٦) الحد الثالث من متتابعة حسابية هو 1 والحد العاشر هو 36. ما مجموع الحدود العشرة الأولى من هذه المتتابعة ؟

(أ) 110 (ب) 125 (ج) 135 (د) 155

(٢٧) مجموع الحدود الثلاثين الأولى للمتتابعة $-\frac{1}{4},\frac{1}{2},-1,2,-4,\ldots$ هو

(أ) $2^{31}-2$ (ب) 2^{31} (ج) $\frac{2^{30}-1}{12}$ (د) $\frac{2^{30}-2}{3}$

(٢٨) الحد العام لمتتابعة هو $a_n = 4+3(n-1)$. ما المجموع S_{15} ؟

(أ) 270 (ب) 275 (ج) 350 (د) 375

(٢٩) إذا كانت a,b,c ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية ومتتابعة هندسية في الوقت نفسه فإن

(أ) $a=b$ و $a\neq c$ (ب) $a=c$ و $b\neq c$

(ج) $a=b=c$ (د) $a\neq b\neq c$

(٣٠) إذا كانت a,b,c,d,e متتابعة حسابية فإن

(أ) $a+e=b+d=2c$ (ب) $a+e=2c$ و $b+d=c$

(ج) $a+e=2c$ و $b+d=3c$ (د) $a+e=c$ و $b+d=2c$

(٣١) ما عدد حدود المتتابعة

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ldots,\ \frac{1}{512}$$ ؟

(أ) 15 (ب) 16 (ج) 17 (د) 21

(٣٢) [MAΘ 2011] اختار سلطان متتابعة حسابية فرقها المشترك هو d ومتتابعة

هندسية نسبتها المشتركة هي r. ثم قام بعد ذلك بجمع الحد الأول من المتتابعة الحسابية مع الحد الأول من المتتابعة الهندسية وجمع الحد الثاني من المتتابعة الحسابية مع الحد الثاني من المتتابعة الهندسية وهكذا لتكوين متتابعة جديدة. إذا كانت $3, 8, 15$ هي الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة الجديدة وإذا كان كل من d و r عدداً صحيحاً موجباً فما مجموع قيم d ؟

(أ) 3 (ب) 7 (ج) 4 (د) 5

(٣٣) [MAΘ 2010] إذا كان $ab \neq 0$ وكانت

$$a, a+b\sqrt{3}, a+b\sqrt{6}$$

متتابعة هندسية حيث $\frac{a}{b} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{m}+n\right)$ فما قيمة $m+n$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٣٤) [AHSME 1963] لتكن الأعداد غير الصفرية a, b, c متتابعة حسابية. إذا أضفنا 1 إلى a أو 2 إلى c نحصل على متتابعتين هندسيتين. ما قيمة b ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 14

(٣٥) [AHSME 1981] مجموع أول حدين من متتابعة هندسية حقيقية يساوي 7 ومجموع أول 6 حدود يساوي 91. ما مجموع الحدود الأربعة الأولى ؟

(أ) 28 (ب) 30 (ج) 32 (د) 34

(٣٦) [AHSME 1966] متتابعة حسابية حدها الأول 2 وحدها الأخير 29 ومجموع حدودها 155. ما فرقها المشترك ؟

(أ) 3 (ب) 2 (ج) $\frac{27}{19}$ (د) $\frac{13}{9}$

(٣٧) [AHSME 1966] إذا كان A_n هو مجموع أول n من حدود المتتابعة

$8, 12, 16, \ldots$ وكان B_n هو مجموع أول n حد من حدود المتتابعة $17, 19, 21, \ldots$ وإذا كان $n \neq 0$ فإن عدد قيم n التي تجعل $A_n = B_n$ هو

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 14

(٣٨) [AHSME 1968] الوسط الحسابي للعددين a و b يساوي ضعف وسطهما الهندسي حيث $a > b > 0$. القيمة الممكنة للنسبة $\frac{a}{b}$ (لأقرب عدد صحيح) هي

(أ) 5 (ب) 10 (ج) 11 (د) 14

(٣٩) [AHSME 1972] لنفرض أن $3 < x < y < 9$ حيث $3, x, y$ متتابعة هندسية و $x, y, 9$ متتابعة حسابية. ما قيمة $x + y$ ؟

(أ) $9\frac{1}{2}$ (ب) 10 (ج) $10\frac{1}{4}$ (د) $11\frac{1}{4}$

(٤٠) [AMC10B, 2003] الحد الثاني من متتابعة هندسية يساوي 2 والحد الرابع يساوي 6. أي من الأعداد التالية يمكن أن يكون الحد الأول ؟

(أ) $-\sqrt{3}$ (ب) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (ج) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (د) $\sqrt{3}$

(٥.١٠) إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) د	(٣) ج	(٤) د	(٥) د
(٦) د	(٧) ج	(٨) ب	(٩) ج	(١٠) ج
(١١) ج	(١٢) ب	(١٣) أ	(١٤) ج	(١٥) ب
(١٦) ب	(١٧) ب	(١٨) ج	(١٩) أ	(٢٠) أ
(٢١) ب	(٢٢) أ	(٢٣) أ	(٢٤) ج	(٢٥) د
(٢٦) ج	(٢٧) ج	(٢٨) د	(٢٩) ج	(٣٠) أ
(٣١) ج	(٣٢) ب	(٣٣) ج	(٣٤) ج	(٣٥) أ
(٣٦) أ	(٣٧) ب	(٣٨) د	(٣٩) د	(٤٠) ب

المراجع
Bibliography

[١] البركاتي، سلطان سعود، مبادئ أساسية لأولمبياد الرياضيات، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).

[٢]الجوعي، عبدالله محمد، مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى، ١٤٣١هـ (٢٠١٠م).

[٣] سمحان، معروف عبدالرحمن وأبوعمه، عبدالرحمن محمد سليمان والذكير، فوزي أحمد، قاموس العلوم الرياضية، النشر العلمي والمطابع، منشورات جامعة الملك سعود ١٤٢٢هـ (٢٠٠١م).

[٤] سمحان، معروف عبدالرحمن والسنوسي، صالح عبدالله، استراتيجيات حلول المسائل (مترجم)، تحت الطبع

[٥] سمحان، معروف عبدالرحمن والذكير، فوزي أحمد، نظرية الأعداد وتطبيقاتها، دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣١هـ (٢٠١٠م).

[٦] سمحان، معروف عبدالرحمن وأندريكا، دورين والذكير، فوزي أحمد، رياضيات الأولمبياد-الجبر-الجزء الأول، دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣٢هـ (٢٠١١م)

[٧] سمحان، معروف عبدالرحمن وأندريكا، دورين والذكير، فوزي أحمد، رياضيات الأولمبياد – نظرية الأعداد – الجزء الأول – دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣٢هـ (٢٠١١م)

[8] Atkins WJ, Edwards JD, King DJ, O'Halloran PJ,and Taylor PJ, Australian Mathematics Competition Book 1 (1978-1984), AMT Publishing 2004

[9] Atkins WJ, Munro JE, and Taylor PJ,Australian Mathematics Competition (1992-1998), AMT Publishing 2009

[10] Atkins WJ, Taylor PJ, Australian Mathematics Competition (1999-2005), AMT Publishing 2007

[11] Batterson J, Competition Math For Middle School, AoPSInc, 2011

[12] Canadian Mathematics Competitions, Past Contest Problems With Solutions, Gauss (Grade 7), Gauss (Grade 8), Pascal(Grade 9), Cayley (Grade 10), and Fermat (Grade 11) (1997-2012)

[13] LehoczkySandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving,Volume 1: The Basics, 7th Edition, AoPS Inc. 2006

[14] LehoczkySandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Volume 2: And Beyond, 7th Edition, AoPS Inc. 2006

[15] Mu Alpha Theta (MAΘ), A Great Collection of High School Problems and Solutions From Past Contests (1995-2011)

[16] O'Halloran PJ, Pollard GH, and Taylor PJ, Ausralian Mathematics Competition Book 2 (1985-1991), AMT Publishing 2003

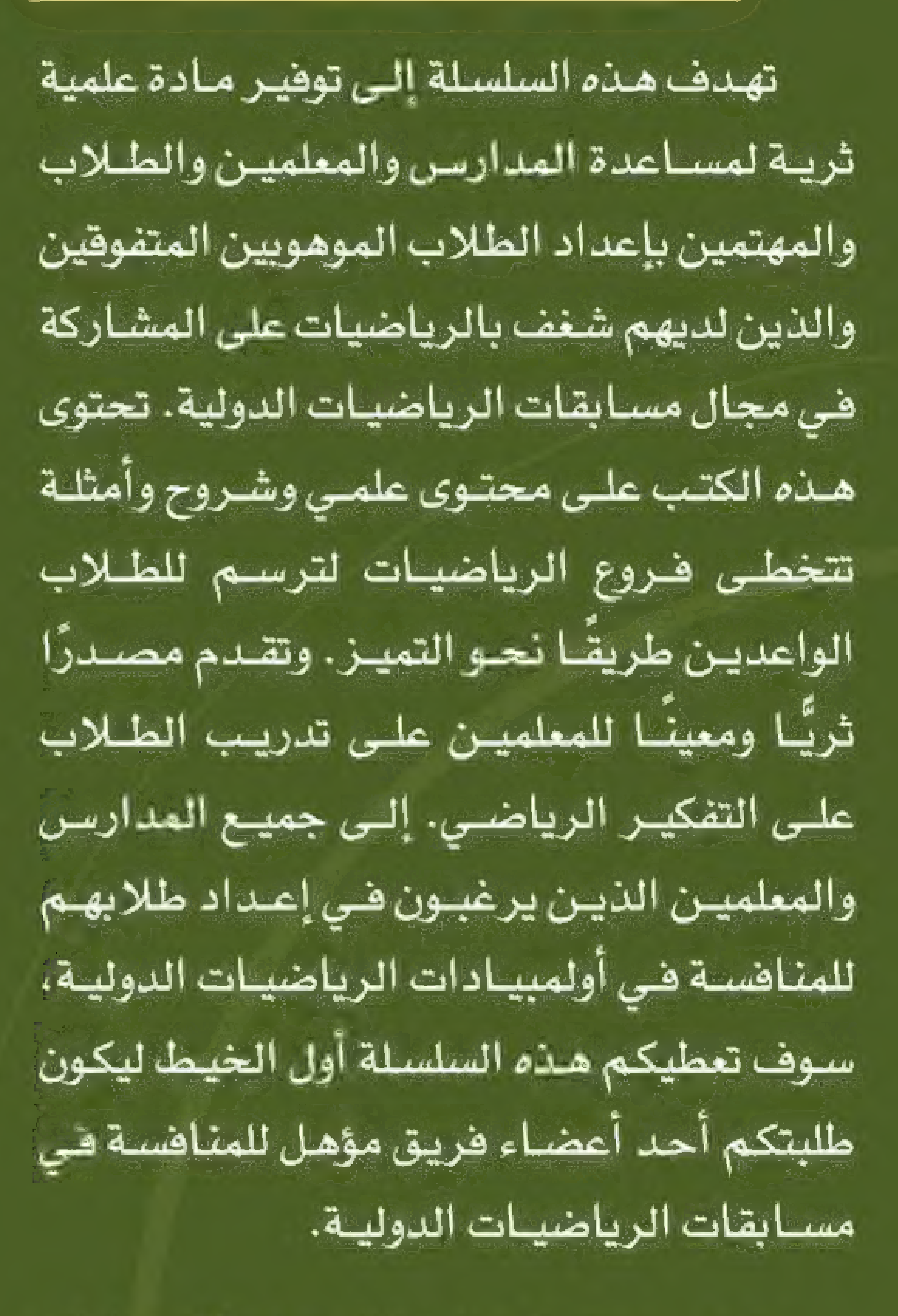
[17] The UK Mathematics Trust, Ten Years of Mathematical Challenges (1997-2006), The University of Leeds, Leeds LS29JT, 2010

كشاف الموضوعات
Subject Index



رياضيات الأولمبياد

مرحلة الإعداد



تهدف هذه السلسلة إلى توفير مادة علمية ثرية لمساعدة المدارس والمعلمين والطلاب والمهتمين بإعداد الطلاب الموهوبين المتفوقين والذين لديهم شغف بالرياضيات على المشاركة في مجال مسابقات الرياضيات الدولية. تحتوى هذه الكتب على محتوى علمي وشروح وأمثلة تتخطى فروع الرياضيات لترسم للطلاب الواعدين طريقًا نحو التميز. وتقدم مصدرًا ثريًا ومعينًا للمعلمين على تدريب الطلاب على التفكير الرياضي. إلى جميع المدارس والمعلمين الذين يرغبون في إعداد طلابهم للمنافسة في أولمبيادات الرياضيات الدولية، سوف تعطيكم هذه السلسلة أول الخيط ليكون طلبتكم أحد أعضاء فريق مؤهل للمنافسة في مسابقات الرياضيات الدولية.

وترمي موهبة من خلال هذه الإصدارات المتخصصة في الرياضيات إلى توفير مادة تدريبية باللغة العربية للمدارس والمعلمين والطلاب، وهي مادة مناسبة لمستويات مختلفة من الطلاب.

موضوع الكتاب

١- الرياضيات - أسئلة وأجوبة

٢- الرياضيات - تعليم

رأيك يهمنا



ISBN:978-603-503-802-7

